POLSKA AKADEMIA NAUK
KOMITET FIZYKI

ACTA PHYSICA POLONICA

KWARTALNIK

Vol. XIII — Fasc. 2

WARSZAWA 1954

Orders and inquires concerning

Acta Physica Polonica

— complete sets, volumes and single fascicules —
as well as other

Polish scientific periodicals

published
before and after the war,
regularly and irregularly,
are to be sent to:

Export and Import Enterprise „RUCH"

Warszawa 1, P.O. Box 154, Poland
Ask for cataloques, folders and sample copies.

First reprint by PWN — Polish Scientific Publishers 1969

MAGNETIC ROTATION OF THE PLANE OF POLARIZATION OF BROADENED RESONANCE LINES

By A. Jabłoński

Physics Department, Nicholas Copernicus University, Toruń

(received September 25, 1953)

According to Weisskopf's theory of resonance fluorescence the rotation of the plane of polarization of resonance radiation by weak magnetic fields is not the same throughout the whole breadth of the line, as one should expect on ground of a semi-classical explanation of the effect given by Hanle, but depends on frequency. Weisskopf's equation, valid for the case of resonance lines not broadened by pressure and/or by Doppler effect, giving the dependence of the angle of rotation on frequency is generalized so as to include also the case of broadened lines.

If resonance radiation from a source placed in a weak magnetic field is observed along the direction of magnetic lines, the plane of polarization of the emitted radiation appears to be rotated and partially depolarized. These effects, first observed by Hanle (1924), have been explained by him by assuming that the atom behaves like a linear „virtual oscillator" whose amplitude decreases exponentially from the moment of excitation. This oscillator is carrying out a Larmor precession if placed in a weak magnetic field. On ground of the above assumption one should expect the rotation of the plane of polarization to be the same throughout the whole breadth of the line. However, the quantummechanical theory of resonance radiation given by Weisskopf (1931) leads to a different result. According to this theory the rotation depends on frequency. The angle of rotation ϑ as a function of angular frequency ω is given by

$$tg\ 2\vartheta = \frac{\gamma\,\Omega}{(\omega'-\omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2}, \tag{1}$$

where ω' is the frequency of the centre of the emitted resonance line, γ its natural half-breadth (or, what amounts to the same in our case, the probability of transition from the upper to the ground level, giving rise to the resonance line) and $\Omega = e\,H/\,2\,mc$ the angular velocity of the Larmor precession in the magnetic field H, e, m, being respectively the charge and mass of the electron, and c the velocity of light. The fact that the rotation decreases with increasing $|\omega'-\omega|$ was used by the present writer in an earlier paper (Jabłoński 1953) for explanation of some phenomena

which were observed by Pringsheim and Jabłoński (1931) in Na-vapour and by Pringsheim an Saltmarsh (1935) in Hg-vapour. These phenomena were observed in vapours at higher pressures, at which the resonance lines are considerably broadened by pressure. In addition they are, of course, also broadened by Doppler effect. However, Weisskopf's eq. (1) is derived for resonance lines having natural breadth only. Thus, if applied to the above case, it can lead to qualitative conclusions only.

The purpose of the present paper is to consider the magnetic rotation of polarization of resonance radiation in the case of lines broadened by pressure and by Doppler effect.

We make an assumption which seems to be the simplest possible and may serve until a fuller theory is developed: We treat the intensity distribution (suitably normalized) of the line produced by broadening factors alone as probability distribution of the shifts of the centres of the natural distributions of lines, thus considering all magnetic effects observed in broadened lines as simple superpositions of those occuring in unbroadened lines.

Let us first restrict ourselves to the consideration of the influence of the pressure only, thus disregarding provisionally the influence of the Doppler effect. We assume the shape of the line caused by pressure broadening alone to be given by

$$J(\omega') = \frac{\gamma_c}{2\pi} \frac{1}{(\omega_o - \omega')^2 + \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} \cdot \tag{2}$$

This is the familiar distribution, resulting from the collision damping theories, γ_c having the significance of the number of damping collisions per second. This shape is chosen here because it allows the calculations to be easily made, although, as well known, the observed shapes differ considerably from that given by (2). Thus, the present results cannot claim to be generally and strictly valid.

Instead of calculating the angles of rotation ϑ resulting from superposition of angles of rotation given by (1) for different ω', we calculate for the sake of simplicity the resulting tg 2ϑ, which may give ϑ with a good approximation for the rather small angles ϑ actually observed. Thus, we consider the resulting tg 2ϑ as a superposition of those given by (1) for different ω' with distribution given by (2):

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma\Omega}{(\omega' - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \Omega^2} \frac{\gamma_c}{2\pi} \frac{1}{(\omega_o - \omega')^2 + \left(\frac{\gamma_c}{2}\right)^2} d\omega' \tag{3}$$

It must be noted that both (1) and (3) are valid only if the condition

$$|\Omega| \ll \frac{\gamma}{2} \tag{4}$$

is fulfilled, i. e., if the line is not split into Zeeman-components. Otherwise one could not speak of rotation of the plane of polarization, since the Zeeman-compo-

nents in question are not plane polarized but circularly. Besides, the expression for $\operatorname{tg} 2\vartheta$ obtained by integration of (3) loses its sense if $|\Omega| > \frac{\gamma}{2}$, when it becomes imaginary. The expression in question reads

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \Omega \left(\gamma + \frac{\gamma_c}{\sqrt{1-\left(\frac{2\Omega}{\gamma}\right)^2}} \right).$$

$$\times \frac{1}{(\omega_o - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma + \gamma_c}{2}\right)^2 - \Omega^2 - \frac{\gamma\gamma_c}{2}\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{2\Omega}{\gamma}\right)^2}\right)}$$

If condition (4) is taken into account, it becomes approximately

$$\operatorname{tg} 2\vartheta \approx \Omega \left(\gamma + \frac{\gamma_c}{\sqrt{1-\left(\frac{2\Omega}{\gamma}\right)^2}} \right) \frac{1}{(\omega_o - \omega)^2 + \frac{\gamma^2 + \gamma_c^2}{4} - \Omega^2\left(1 + \frac{\gamma_c}{\gamma}\right)}, \tag{5}$$

or even

$$\operatorname{tg} 2\vartheta \approx \Omega (\gamma + \gamma_c) \frac{4}{4(\omega_o - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma_c^2}. \tag{5a}$$

One obtains therefrom the mean value (over all frequences) of $\operatorname{tg} 2\vartheta$ which would be observed in the case of lines not distorted by reabsorption. Provided the condition (4) is fulfilled, this mean value is approximately

$$\overline{\operatorname{tg} 2\vartheta} \approx \operatorname{tg} 2\bar{\vartheta} \approx \frac{4\Omega(\gamma + \gamma_c)}{\gamma^2 + \gamma_c^2 + (\gamma + \gamma_c)\sqrt{\gamma^2 + \gamma_c^2}}. \tag{6}$$

For $\gamma_c \ll \gamma$ this becomes $\operatorname{tg} 2\vartheta = 2\Omega/\gamma$ i. e. the expression given by Weisskopf (1931), and for $\gamma_c \gg \gamma$ $\operatorname{tg} 2\vartheta = 2\Omega/\gamma_c$.

A few words may be added concerning the influence of the Doppler breadth of the line on the magnetic rotation. Let us denote the Doppler shift $|\omega_{Doppl} - \omega_o|$ by z. The Doppler distribution is

$$P(z)\, dz = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{b^2}} dz, \tag{7}$$

where

$$b = \frac{\omega_o}{c}\sqrt{\frac{2RT}{m}}$$

(the meaning of the notations being the usual one). We assume again, as we have already done while considering the effect of pressure, that the only result of the Doppler effect is to produce a shift of ω_o in (5) or (5a) from ω_o to $\omega_o + z$, the probability distribution of the shifts being given by (7). From (5a) and (7) there results

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{\Omega(\gamma + \gamma_c)}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{b^2}}}{(\omega - \omega_o - z)^2 + \frac{\gamma^2 + \gamma_c^2}{4}} dz, \tag{8}$$

an expression valid for resonance lines broadened by pressure as well as by Doppler effect. The integration of (8) can be carried out approximately by expansion of the integrand into a suitable series. Such expansions can be found e. g. in Born's *Optics* (1933, page 484). By using an expansion leading to a good approximation for large $|\omega_o - \omega|$, we get

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{4\Omega(\gamma + \gamma_c)}{4(\omega_o - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma_c^2} \left[1 - 2\, b^2 \frac{\gamma^2 + \gamma_c^2 - 12\,(\omega - \omega_o)^2}{[4(\omega_o - \omega)^2 + \gamma^2 + \gamma_c^2]^2} + \ldots \right]. \tag{9}$$

Provided our assumptions are correct, we can conclude from our considerations that the magnetic rotation of the plane of polarization of broadened lines decreases with increasing spectral distance $|\omega_o - \omega|$ from the centre of the line ω_o and practically vanishes at frequencies ω sufficiently distant from ω_o, just as in the case of unbroadened lines.

This conclusion may serve as a justification of the assumptions made in an earlier paper of the writer (1953) for the explanation of the lack of magnetic rotation of the plane of polarization of the D resonance line of sodium at higher vapour pressures, when only the wings of the broadened line reach the walls of the container.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

А. Яблонский, *Магнитное вращение плоскости поляризации расширённых резонансных линий.*

Согласно с теорией Вейскопфа резонансной фруоресценции, вращение плоскости поляризации резонансного излучения в слабых магнитных полях не одинаково для всей ширины линии, вопреки тому, чего следует ожидать на основании полуклассической теории Ганле. Оно зависит от частоты; сильнее всего вращение плоскости поляризации в середине линии, слабее на краях. Уравнение Вейскопфа, выведённое для линий имеющих только естественную ширину, обобщено на случай линий расширённых давлением и явлением Допплера.

REFERENCES

Born M., *Optik*, Berlin (1933).
Hanle W., Z. Phys., **30**, 93 (1924).
Jabłoński A., *Nuovo Cimento*, **10**, 573 (1953).
Jabłoński A. and Pringsheim P., Z. *Phys.*, **73**, 281 (1931).
Pringsheim P. and Saltmarsh O., *Proc. Roy. Soc.*, **154**, 90 (1935).
Weisskopf V. *Ann. Phys.* (Leipzig), **9**, 23 (1931).

ON A REGULAR FIELD THEORY III

By Jerzy Rayski

Department of Physics, Nicholas Copernicus University, Toruń

(received October 10, 1953)

A perturbation method applicable to local as well as to non-local field theories is presented and applied to the computation of the probability amplitude that a vacuum state remains a vacuum state. In order to secure convergence it is necessary to assume (besides the non-localizability of interaction) a finite space-time domain. It is shown also that in the non-local field theory the probability amplitudes are not expressible in terms of the causal functions of Stueckelberg and Feynman.

With the electrodynamics of electrons as an example of quantum field theory a detailed account is given of an invariant perturbation method avoiding the Schrödinger equation. This method working in the Heisenberg picture is directly applicable to non-local field theories. The hermitian operator K and the unitary operator U is computed up to the order e^2 for both local and non-local electrodynamics. The matrix element denoting the probability amplitude for a vacuum state to remain a vacuum state is computed in detail and examined from the point of view of the convergence difficulties. Remarkably enough, the divergences (encountered in this possibly simplest and most primitive physical situation: a vacuum) are of an even worse type than in other cases (e. g. in the expressions for the self energies of particles).

In Parts I, and II, two distinct reasons for breaking down of the perturbation methods (based on a power series expansion in the coupling constant) have been pointed out: (i) a singular character of the Green functions, and (ii) a singular (infinite) domain of space-time commonly assumed for practical computations. The problem of the vacuum is particularly suited for illustrating the two reasons of the difficulties (the former being an intrinsic property of every local field theory, the latter merely a matter of convenience for practical computations).

The results of our investigation are: As well in the case of an infinite domain as in the case of a finite domain enclosed between two hypersurfaces σ_1 and σ_2 the probability amplitude that a vacuum state on σ_1 will remain a vacuum state on σ_2 is divergent within the framework of the local electrodynamics of electrons. In the case of an infinite domain (σ_1 and σ_2 removed to minus and plus infinity) the above probability amplitude is also divergent within the non-local electrodynamics with any

type of form factors. On the other hand, in the case of a finite domain the convergence is secured for non-local electrodynamics (with limited form functions).

The convergence of integrals of a similar type to those encountered in the vacuum problem (whose integrand is a product of three Δ - like functions) will be of decisive importance for the general proof of the convergence of the power series expansion of field quantities, of expectation values of observables, and of probability amplitudes.

1. *A perturbation method adapted to the Heisenberg picture*

In this section we shall present in some detail a (time dependent) perturbation method taking advantage of the field equations but not of the Schrödinger equation, i. e. adapted for the quantum field theory expressed in the Heisenberg picture. If applied to localizable fields, this method (initiated by Yang and Feldman (1950), and Källén (1950)) is equivalent to the earlier invariant methods working in the Tomonaga picture (interaction representation). A great advantage of this method is its direct applicability to non-local field theories (Rayski 1951). The earlier methods are of no help in this case since a (time dependent) Schrödinger equation does not exist for non-local fields.

Let us consider first the traditional (i. e. local) quantum electrodynamics of electrons. The field equations written in a symmetrized form are

$$\Box A_\mu = -ej_\mu \tag{1.1'}$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi = \frac{ie}{2}\left\{A_\mu, \gamma_\mu \psi\right\} \tag{1.1''}$$

where j_μ is the current fourvector

$$j_\mu = \frac{i}{2}[\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi], \tag{1.2}$$

and

$$[a, b] = ab - ba, \qquad \{a, b\} = ab + ba. \tag{1.3}$$

With the aid of the Green function

$$\Delta^\sigma(x,y) = \begin{cases} -\Delta(x-y) & \text{for } \sigma_x > y > \sigma \\ \Delta(x-y) & \text{for } \sigma > y > \sigma_x \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{1.4}$$

(where $\Delta(x)$ is the well known Jordan-Pauli function for the mass constant m, σ denotes a space-like hypersurface, σ_x another space-like hypersurface passing through the four-point x, and the symbol $>$ means "later than") the field equations (1.1) may be replaced by the (formally equivalent) integral equations

$$A_\mu(x) = A_\mu^\sigma(x) + e\int dy\, D^\sigma(x-y)\, j_\mu(y) \tag{1.5'}$$

$$\psi(x) = \psi^\sigma(x) + \frac{e}{2i}\int dy\, S^\sigma(x-y)\,\{A_\mu(y), \gamma_\mu \psi(y)\} \tag{1.5''}$$

where D^σ is given by an expression similar to (1.4) with the Jordan-Pauli function D for the mass constant zero, while

$$S^\sigma(x,y) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right) \Delta^\sigma(x,y). \tag{1.6}$$

$\int dy$ means a four-fold integration over the whole space-time. A_μ^σ and ψ^σ are free waves satisfying the equations

$$\Box A_\mu^\sigma = 0 \ , \qquad \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right) \psi^\sigma = 0. \tag{1.7}$$

On account of the properties of the Green functions

$$(\Box - m^2)\, \Delta^\sigma(x,y) = -\delta^{(4)}(x-y) \tag{1.8}$$

and

$$\Delta^\sigma(x_\sigma,y) = \frac{\partial}{\partial x_o} \Delta^\sigma(x_\sigma, y) = 0 \tag{1.9}$$

where x_σ denotes a point lying on the surface σ, the solution ψ coincides with ψ^σ and A_μ coincides with A_μ^σ (together with its time-like derivative) on the surface σ. Thus, ψ^σ and A_μ^σ determine the initial conditions on σ.

Let us consider two hypersurfaces σ_1 and σ_2, write twice the integral equations (1.5) in terms of the two hypersurfaces, and choose ψ^{σ_2}, $A_\mu^{\sigma_2}$ to coincide on σ_2 with the solution of the first set of equations. In this case both sets of the integral field equations determine the same solution ψ, A_μ, and the two sets may be added or substracted from each other

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(o)}(x) + e \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, \overline{D}(x-y)\, j_\mu(y) \tag{1.10'}$$

$$\psi(x) = \psi^{(o)}(x) + \frac{e}{2i} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, \overline{S}(x-y)\, \{A_\mu(y), \gamma_\mu \psi(y)\} \tag{1.10''}$$

and

$$A_\mu^{\sigma_2}(x) - A_\mu^{\sigma_1}(x) = -e \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y)\, j_\mu(y) \tag{1.11'}$$

$$\psi^{\sigma_2}(x) - \psi^{\sigma_1}(x) = \frac{ie}{2} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, S(x-y) \{A_\mu(y), \gamma_\mu \psi(y)\} \tag{1.11''}$$

where $\overline{D}$ and $\overline{S}$ are the symmetrized Green functions

$$\overline{D}(x) = -\frac{1}{2} D(x) sgn x_o \ , \quad \overline{S}(x) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x} - m\right)\overline{\Delta}, \tag{1.12}$$

while $A_\mu^{(o)}$ and $\psi^{(o)}$ mean half the sum of the initial and final waves:

$$A_\mu^{(o)} = \frac{1}{2}(A_\mu^{\sigma_1} + A_\mu^{\sigma_2}) , \quad \psi^{(o)} = \frac{1}{2}(\psi^{\sigma_1} + \psi^{\sigma_2}). \tag{1,13}$$

The field quantities ψ and A_μ satisfy the well known canonical commutation relations for pairs of points lying on the same space-like hypersurface σ in particular on the surface σ_1 (where the solution is identical with $A_\mu^{\sigma_1}$ and ψ^{σ_1}), or on the surface σ_2 (where the solution reduces to $A_\mu^{\sigma_2}$, ψ^{σ_2}). Since $A_\mu^{\sigma_1}$, ψ^{σ_1} and $A_\mu^{\sigma_2}$, ψ^{σ_2} are free waves, their commutation relations may be generalized in a well known way to two arbitrary four-points x, y

$$[A_\mu^{\sigma_1}(x), A_\nu^{\sigma_1}(y)] = i\delta_{\mu\nu}D(x-y), \quad \{\psi^{\sigma_1}(x), \bar{\psi}^{\sigma_1}(y)\} = -i\, S(x-y), \tag{1.14}$$

while the remaining commutators (anticommutators) vanish. The waves labelled with σ_2 satisfy the same commutation relations. Since the two sets of free waves (labelled by σ_1 and σ_2) satisfy the same commutation relations, both are connected by a unitary transformation

$$A_\mu^{\sigma_2}(x) = U^{-1}A_\mu^{\sigma_1}(x)U, \quad \psi^{\sigma_2}(x) = U^{-1}\psi^{\sigma_1}(x)U. \tag{1.15}$$

Introducing (1.15) into (1.11) with

$$U = \frac{1-iK}{1+iK} \tag{1.16}$$

we have

$$\left[A_\mu^{\sigma_1}(x) - \frac{e}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy D(x-y) j_\mu(y), K\right] = -\frac{ie}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy D(x-y)(j_\mu(y) + Kj_\mu(y)K) \tag{1.17'}$$

or, on account of (1.11') and (1.13)

$$[A_\mu^{(o)}(x), K] = -\frac{ie}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy D(x-y)(j_\mu(y) + Kj_\mu(y)K). \tag{1.18'}$$

In the same way

$$\left[\psi^{\sigma_1}(x) - \frac{e}{4i}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy S(x-y)\, \{A_\mu(y), \gamma_\mu\psi(y)\}, K\right] =$$

$$= -\frac{e}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy S(x-y)(\{A_\mu(y), \gamma_\mu\psi(y)\} + K\{A_\mu(y), \gamma_\mu\psi(y)\}K) \tag{1.17''}$$

or

$$[\psi^{(o)}(x), K] = -\frac{e}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\; S(x-y)(\{A_\mu(y), \gamma_\mu\psi(y)\} + K\{A_\mu(y), \gamma_\mu\psi(y)\}K). \tag{1.18''}$$

Formulae (1.17) or (1.18) may be used for a (formal) computation of K as a power series of the coupling constant[1].

The hermitian character of K follows from the unitary character of U which, in turn, is a consequence of the canonical quantization. But the hermitian character of K may be also seen directly from (1.17) or (1.18). First of all it is easily seen that (1.18′) is compatible with an hermitian K, since $A_\mu^{(o)}$ is hermitian and a commutator between two hermitian operators is antihermitian. Let us see, whether (1.18′) may be compatible also with a non-hermitian $K = M + iN$ (where M and N are hermitian). Separating in (1.18′) the hermitian and the antihermitian parts we have in particular

$$[A_\mu^{(o)}(x), N] = -\frac{ie}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy D(x-y)(Mj_\mu(y)N + Nj_\mu(y)M). \qquad (1.19)$$

Let us expand M and N in powers of e. Since M begins with a first order term $M = eM_1 + \ldots$, the coefficients N_0, N_1 must be zero while N_2 and N_3 must commute with $A_\mu^{(o)}$, i. e are independent of $A_\mu^{(o)}$. Similarly, by using (1.18″) it may be seen that N_2, N_3 are independent of $\psi^{(o)}$. Thus, N_2, N_3 are meaningless arbitrary constants which may be put equal to zero. Consequently, all higher order coefficients will be zero as well, and K reduces to an hermitian operator.

These considerations confirm the well known fact, that the initial and terminal waves are connected by a unitary transformation. But similar arguments may be used to prove that half the sum of the ingoing and outgoing waves (1.13) satisfy also the usual commutation relations for free waves

$$[A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(x')] = i\delta_{\mu\nu}D(x-x'), \quad \{\psi^{(o)}(x), \bar{\psi}^{(o)}(x')\} = -i\,S(x-x') \qquad (1.20)$$

(while all the remaining commutators (anticommutators) vanish). This fact is not at all trivial in view of the circumstance that the commutators (anticommutators) in (1.20) comprise mixed terms of the type $[A_\mu^{\sigma_1}, A_\nu^{\sigma_2}]$ where $A_\mu^{\sigma_1}$ and $A_\nu^{\sigma_2}$ are connected by equation (1.11) involving the interaction. To prove (1.20) we add and subtract $A_\mu^{\sigma_1}$ from (1.11′)

$$A_\mu^{(o)}(x) - A_\mu^{\sigma_1}(x) = -\frac{e}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y)j_\mu(y), \qquad (1.21)$$

(a similar equation holding for $\psi^{(o)} - \psi^{\sigma_1}$). Introducing an operator V defined by

$$V A_\mu^{(o)} = A_\mu^{\sigma_1} V, \quad V\psi^{(o)} = \psi^{\sigma_1}V \qquad (1.22)$$

and putting

$$V = \frac{1-iL}{1+iL} \qquad (1.23)$$

[1] Owing to the commutators to the left sides of (1.17) or (1.18) all the coefficients of the power series are determined only to an arbitrary additive constant.

we get from (1.21)

$$\left[A_\mu^{\sigma_1}(x) - \frac{e}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y) j_\mu(y)\,,\ L\right] = -\frac{ie}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y)(j_\mu(y) + L j_\mu(y) L). \tag{1.24}$$

This formula differs from the corresponding formula (1.17′) merely by the fact that e has been replaced by $e/2$. At first sight it might appear that $L(e) = K(e/2)$ but this is not the case since j_μ depends on the coupling constant as well. Indeed, to compute the current we have to use equations (1.10). Denoting the coupling parameter in (1.10) by ε, we have

$$K = K(\varepsilon,\ e)_{[\varepsilon=e]} \quad \text{and} \quad L(\varepsilon,\ e) = K\left(\varepsilon, \frac{e}{2}\right)_{[\varepsilon = e]}. \tag{1.25}$$

By using instead of (1.24) a corresponding expression involving ψ^{σ_1}, we find again the last relation (1.25), so that both formulae (1.22) are compatible with each other (V is the same in both). Moreover, by using the same arguments as before, we can prove that L is hermitian. Thus, $A_\mu^{(o)}$ and $\psi^{(o)}$ are connected with $A_\mu^{\sigma_1}$ and ψ^{σ_1} by a unitary transformation, wherefrom the relations (1.20) follow.

It may be shown, more generally, that not only $K(e, e)$ and, $K(e, e/2)$ but also $K(e, \varepsilon)$ with an arbitrary ε/e is hermitian, whence an arbitrary linear combination $kA_\mu^{\sigma_1} + lA_\mu^{\sigma_1}$ with $k + l = 1$ satisfies the usual commutation relations for free waves.

The transformation matrix U may be computed with the aid of (1.10), (1.18), and (1.20). In first order of approximation (1.18) yields

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{ie}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y) j_\mu^{(o)}(y) \tag{1.26′}$$

and

$$[\psi^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{e}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy S(x-y)\ \{A_\mu^{(o)}(y), \gamma_\mu \psi^{(o)}(y)\}, \tag{1.26″}$$

or

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{e}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy [A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(y)]\, j_\nu^{(o)}(y) \tag{1.27′}$$

and

$$[\psi^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{ie}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy \{\psi^{(o)}(x), \bar{\psi}^{(o)}(y)\}\{A_\mu^{(o)}(y), \gamma_\mu \psi^{(o)}(y)\}, \tag{1.27′}$$

or

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{e}{2}\left[A_\mu^{(o)}(x), \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy A_\nu^{(o)}(y) j_\nu^{(o)}(y)\right] \tag{1.28′}$$

and

$$[\psi^{(o)}(x), K^{(1)}] = -\frac{ie}{4}\left[\varphi^{(o)}(x), \int_{\sigma_1}^{\sigma} dy A_\mu^{(o)}(y)[\overline{\psi}^{(o)}(y), \gamma_\mu \psi^{(o)}(y)]\right]. \quad (1.28'')$$

From (1.28′) we infer that

$$a = K^{(1)} + \frac{e}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx A_\nu^{(o)}(x) j_\nu^{(o)}(x) \qquad (1.29)$$

is independent of $A_\mu^{(o)}$, from (1.28″) that it is independent of $\psi^{(o)}$. Thus, a is a constant. Such a constant is physically meaningless and may be simply discarded, so that

$$K^{(1)} = -\frac{e}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx A_\mu^{(o)}(x) j_\mu^{(o)}(x). \qquad (1.30)$$

It may be remarked that if we had retained the constant a it would produce renormalization effects in higher orders of approximation, for example the term

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(3)}] = -\frac{ie}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y)(j_\mu^{(2)}(y) + K^{(1)} j_\mu^{(o)}(y)\, K^{(1)}) \qquad (1.31)$$

would contain an additional term of the form

$$-\frac{iea^2}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy\, D(x-y)\, j_\mu^{(o)}(y), \qquad (1.32)$$

which obviously represents a charge renormalization of the first order term (given e. g. by (1.26′)).

The computation of the second order term $K^{(2)}$ is more involved and will be presented in Appendix I. The result is

$$K^{(2)} = -\frac{e^2}{16}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy([\overline{\psi}^{(o)}(y)\gamma_\nu \overline{S}(y-x), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x)] + \qquad (1.33)$$

$$+ [\overline{\psi}^{(o)}(x), \gamma_\mu \overline{S}(x-y)\gamma_\nu \varphi^{(o)}(y)])\{A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(y)\} - \frac{e^2}{4}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\, j_\mu^{(o)}(x) j_\mu^{(o)}(y)\, \overline{D}(x-y).$$

$K^{(1)}$ and $K^{(2)}$ are obviously hermitian and identical with those obtained by means of the traditional methods.

2. *Application to a non-local electrodynamics*

In the framework of the non-local theory the Lagrangian and the field equations differ from the local ones by the fact that the interaction terms are averaged by means

of suitable form factors. It has been shown in Part I that a full correspondence with the local field theory may be secured only by means of a rather elaborate form factor dependent on the domain between the two surfaces[2]

$$F(x',x'',x''') = 3\,\Phi(x'-x'',x''-x''') - 2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx R(x'-x,x''-x,x'''-x) \qquad (2.1)$$

where Φ and R are functions of the parameter λ with the properties

$$\lim_{\lambda\to o} \Phi\,(x'-x'',x''-x''') = \delta(x'-x'')\,\delta(x''-x''') \qquad (2.2)$$

$$\lim_{\lambda\to o} R(x'-x,x''-x;x'''-x) = \delta(x'-x)\delta(x''-x)\delta(x'''-x)$$

where $\delta\,(x)$ are four-dimensional Dirac delta functions.

The action functional is

$$W = W^{(o)} + W' \qquad (2.3)$$

where $W^{(o)}$ is the interaction-free part of the usual form well-known from local electrodynamics, while the interaction part is

$$W' = \frac{ie}{4}\iiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx'dx''dx'''\,F(x',x'',x''')\,\{A_\mu(x''),\,[\overline{\psi}(x'),\gamma_\mu\psi(x''')]\}. \qquad (2.3')$$

The integro-differential field equations (obtained from a variational principle) are simple generalizations of the differential equations (1.1) and may be replaced by the following integral equations (corresponding to (1.10))

$$A_\mu(x'') = A_\mu^{(o)}(x'') + \frac{ie}{2}\iiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy'dy''dy'''\,F(y',y'',y''')\,\overline{D}(x''-y'')\,[\overline{\psi}(y'),\gamma_\mu\,\psi(y''')] \qquad (2.4')$$

$$\psi(x''') = \psi^{(o)}(x''') + \frac{e}{2i}\iiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy'dy''dy'''F(y',y'',y''')\overline{S}(x'''-y')\,\{A_\mu(y''),\gamma_\mu\psi(y''')\} \qquad (2.4'')$$

We find also relations (corresponding to (1.11))

$$A_\mu^{\sigma_2}(x'') - A_\mu^{\sigma_1}(x'') = \qquad (2.5')$$

$$-\frac{ie}{2}\iiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy'dy''dy'''F(y',y'',y''')\,D(x''-y'')\,[\overline{\psi}(y'),\gamma_\mu\psi(y''')]$$

---

[2] (2.1) is written in a more general form than in previous papers where we have put $\Phi(x'-x'',x''-x''') = \int_{-\infty}^{+\infty} dxR(x'-x,\,x''-x,{}'''-x)$. Obviously Φ and R may be two unrelated form functions.

$$\psi^{\sigma_2}(x''') - \psi^{\sigma_1}(x''') =$$
$$- \frac{e}{2i} \iiint\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy' dy'' dy''' F(y',y'',y''') \, S(x'''-y')\{A_\mu(y''),\gamma_\mu\psi(y''')\}. \tag{2.5}$$

(2.3), (2.4), and (2.5) differ from the corresponding local formulae by some substitutions which may be explained by means of simple transcription rules.

It has been shown in Part II that (at least for an action functional without derivatives in the interaction term which is just the case in (2.3′)) the non-local field quantities taken at two points on a boundary surface σ_1 (or σ_2) satisfy the usual canonical commutation relations. Therefore, the usual commutation relations (1.14) hold also for the non-local electrodynamics. Hereby the fact that both sets of field quantities (attached to the surface σ_1 and σ_2) satisfy the same commutation relations is most essential. It ensures that the initial waves $A_\mu^{\sigma_1},\psi^{\sigma_1}$ are related to the terminal waves $A_\mu^{\sigma_2},\psi^{\sigma_2}$ by a unitary transformation U. Thus, we may set up formulae similar to (1.15)—(1.18) (where (1.17) and (1.18) appear in a generalized form given by the above mentioned transcription rules) and compute K as a power series of the coupling constant. The formal computation of K as a power series is a mechanical procedure (consisting in repeated substitutions and in equating the terms of equal powers in e), so that the resulting K must not differ from the local one except for the same substitutions as those leading from (1.10) to (2.4) and from (1.11) to (2.5). Thus, we are released from the necessity of computing the operator K anew but may simply transcribe the local K into the non-local one. A confirmation of the consistency of this procedure is given by the following argument: the transcription of K from the local into the non-local form cannot spoil its hermitian character provided the form factor itself is „hermitian“

$$F(x',x'',x''') = F^*(x''',x'',x'). \tag{2.6}$$

In the same way, the introduction of a „hermitian“ form factor cannot spoil the hermitian character of L given by (1.24), wherefrom the commutation relations (1.20) follow.[3]
In the lowest orders of approximation the non-local K is[4]

$$K^{(1)} = -\frac{ie}{4} \iiint\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx'dx''dx''' F(x',x'',x''') \, [\bar\psi^{(o)}(x'),\gamma_\mu\psi^{(o)}(x''')] A_\mu^{(o)}(x'') \tag{2.7}$$

$$K^{(2)} = -\frac{e^2}{16} \int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cdots \int dx' \ldots dy''' F(x',x'',x''') F(y',y'',y''') . \{\} \tag{2.8}$$

[3] It should be remembered that (1.20) was used for the explicite derivation of K.

[4] Corresponding formulae have been published in an earlier paper (Rayski 1951). By mistake the term P there is too large by a factor 2.

where

$$\{\} \doteq ([\bar{\psi}^{(o)}(y')\gamma_\nu \bar{S}(y''' - x'), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x''')] + [\bar{\psi}^{(o)}(x'), \gamma_\mu \bar{S}(x''' - y')\gamma_\nu \psi^{(o)}(y''')]) \quad (2.8')$$
$$\{A_\mu^{(o)}(x''), A_\nu^{(o)}(y'')\} - [\bar{\psi}^{(o)}(x'), \gamma_\mu \psi^{(o)}(x''')][\bar{\psi}^{(o)}(y'), \gamma_\mu \bar{\psi}^{(o)}(y''')]\, \bar{D}(x'' - y'').$$

3. *A discussion of the vacuum state*

Let us compute (up to the order e^2) the probability amplitude that a vacuum state on σ_1 remains a vacuum state on σ_2. This probability amplitude is given by the matrix element

$$\langle 0|U|0\rangle = \langle 0|\frac{1 - iK}{1 + iK}|0\rangle \quad (3.1)$$

where $|0\rangle$ denotes a vacuum state with respect to photons and electrons. Up to the second order, we have

$$\langle 0|U|0\rangle = \langle 0|\, 1 - 2iK^{(1)} - 2iK^{(2)} - 2(K^{(1)})^2|0\rangle = \quad (3.2)$$
$$1 - 2i\langle 0|K^{(2)}|0\rangle - 2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle$$

with $K^{(1)}$ and $K^{(2)}$ given by the local expressions (1.30) and (1.32). The result is

$$-2i\langle 0|K^{(2)}|0\rangle = ie^2 \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\{2D^{(1)}(x-y)[-\Delta_{,\nu}^{(1)}(x-y)\bar{\Delta}_{,\nu}(y-x) +$$
$$+ 2m^2\Delta^{(1)}(x-y)\bar{\Delta}(y-x)] + \bar{D}(x-y)[-\Delta_{,\nu}^{(1)}(x-y)\Delta_{,\nu}^{(1)}(y-x) + \quad (3.3)$$
$$+ 2m^2\Delta^{(1)}(x-y)\Delta^{(1)}(y-x) - \Delta_{,\nu}(x-y)\Delta_{,\nu}(y-x) + 2m^2\Delta(x-y)\Delta(y-x)]\}$$

and

$$-2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle = \frac{e^2}{2}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\{2D(x-y)[\Delta_{,\nu}^{(1)}(x-y)\Delta_{,\nu}(y-x) -$$
$$- 2m^2\Delta^{(1)}(x-y)\Delta(y-x)] + D^{(1)}(x-y)[\Delta_{,\nu}^{(1)}(x-y)\Delta_{,\nu}^{(1)}(y-x) - \quad (3.4)$$
$$-2m^2\Delta^{(1)}(x-y)\Delta^{(1)}(y-x) + \Delta_{,\nu}(x-y)\Delta_{,\nu}(y-x) - 2m^2\Delta(x-y)\Delta(y-x)]\}$$

where $\Delta_{,\nu}$ means the partial derivative with respect to the first variable, e. g.

$$\Delta_{,\nu}(y-x) = \frac{\partial}{\partial y_\nu}\Delta(y-x). \quad (3.5)$$

For the derivation of (3.3) and (3. 4) see Appendix II.

The expressions corresponding to (3.3) and (3.4) in the framework of the non-local electrodynamics follow from (3.3) and (3.4) by means of the above mentioned transcription rules

$$D(x-y) \to D(x''-y''),\ \Delta(x-y) \to \Delta(x'''-y'),\ \Delta(y-x) \to \Delta(y'''-x')$$
$$\iint dxdy \to \int\dots\int dx'\dots dy'''\, F(x',x'',x''')\, F(y',y'',y'''). \quad (3.6)$$

Up to this moment the analogy between the local and the non-local formulae has been very close. However, the local formulae may be simplified further by taking advantage of the causal functions of Stuckelberg and Feynman

$$\Delta^{(c)} = \Delta^{(1)} - 2i\bar{\Delta}, \tag{3.7}$$

which is not practicable for the non-local theory. By multiplying the terms containing the Jordan-Pauli functions in (3.3) and (3.4) by

$$[sgn(x_0 - y_0)]^2 = 1 \tag{3.8}$$

and using (1.12) and (3.7), we may write compactly

$$\langle 0\, U^{(2)}|0\rangle = \frac{e^2}{2}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\, D^{(c)}(x-y)[\Delta_{,}^{(c)}(x-y)\Delta_{,}^{(c)}(y-x) - \\ - 2\, m^2 \Delta^{(c)}(x-y)\Delta^{(c)}(y-x)] \tag{3.9}$$

where

$$Re\langle 0|\,U^{(2)}|0\rangle = -2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle, \quad Im\langle 0|\,U^{(2)}|\,0\rangle = -2\langle 0|K^{(2)}|0\rangle. \tag{3.10}$$

It is easy to see why the compact notation with the causal functions is impracticable in the non-local theory: it is not possible to multiply the products of two Δ functions (or the products of a D and a Δ function) by (3.8) and replace in this way Δ by $\bar{\Delta}$ since these two functions are not taken, at the same points (or sgn $(x' - y''')$ sgn $(x''' - y')$ is not unity). This reflects the non-local character of interaction in small space-time regions.

In order to investigate the type of singularities appearing in the probability amplitude (3.1) it suffices to consider some typical terms e. g.

$$A = \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\, \bar{D}(x-y)\Delta^{(1)}(x-y)\Delta^{(1)}(y-x),$$

$$B = \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\, \bar{D}(x-y)\frac{\partial}{\partial x_{,}}\Delta^{(1)}(x-y)\cdot\frac{\partial}{\partial y_{,}}\Delta^{(1)}(y-x). \tag{3.11}$$

In practical calculations one used to remove the surface σ_1 (σ_2) to minus (plus) infinity, whereby the matrix U became the S matrix of Heisenberg. Then, the computations became (formally) much easier. By removing the two surfaces in (3.11) to $\pm$ infinity and introducing the four-dimensional Fourier representations of the $\bar{D}$ and $\Delta^{(1)}$ functions (Schwinger 1949) the integrals A and B became

$$A = (2\pi)^{-6}\int dx\int dp\int dq\,\frac{\delta(p_\mu^2 + m^2)\delta(q_{,}^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2}, \tag{3.12}$$

$$B = -(2\pi)^{-6}\int dx\int dp\int dq\,\frac{p_\varrho q_\varrho \delta(p_\mu^2 + m^2)\delta(q_{,}^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2}.$$

These formulae are obviously meaningless. Not only the whole expression A (or B) but even the three (four-dimensional) integrations $\int dx$, $\int dp$, $\int dq$, separately diverge. As

$$J = \int dq \frac{\delta(q_\mu^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2} \tag{3.13}$$

is (formally) an invariant, we may compute it in a special frame of reference where p_μ (regarded as a parameter) has only the fourth component different from zero $\vec{p} = 0$, $p = m$[5]. Then (3.13) becomes

$$J = -\frac{1}{2m}\int dq \frac{\delta(q_\mu^2 + m^2)}{q_o + m} = -\frac{1}{2m}\int d^3q \int_{-\infty}^{+\infty} dq_o \frac{\delta(q_o^2 - \vec{q}^2 - m^2)}{q_o + m} =$$
$$= \int d^3q \int_0^\infty dq_0 \frac{\delta(q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2)}{q_0^2 - m^2} = \frac{1}{2}\int d^3q \frac{1}{\vec{q}^2\sqrt{\vec{q}^2 + m^2}} = 2\pi \int_0^\infty dq \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}}. \tag{3.14}$$

There remains the four-dimensional integration over dp

$$\int dp\, \delta(p_\mu^2 + m^2) = 2\pi \int_0^\infty dp \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{3.15}$$

and an integration over the whole space-time $\int dx$ of an integrand independent of x. This yields an infinite "volume" of the whole space-time Ω_∞ and

$$A \doteq (2\pi)^{-4}\, \Omega_\infty \int_0^\infty dq \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}} \int_0^\infty dp \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}}. \tag{3.16}$$

Thus A is a meaningless product of three infinite factors. Owing to a product $p_\mu q_\mu$ in the numerator, the degree of the divergences in B is still higher.

Let us see to which extent a form factor may improve the situation. In the framework of the non-local electrodynamics the term A becomes

$$A = \tag{3.17}$$
$$\int \ldots \int dx' \ldots dy''' F(x',x'',x''')\, F(y',y'',y''') \overline{D}(x'' - y'') \Delta^{(1)}(x''' - y') \Delta^{(1)}(y''' - x').$$

Since the form factor has to be invariant under translations, we may write it in the form

$$F(x',x'',x''') = (2\pi)^{-8} \int dr \int ds\, e^{i(x_\mu' - x_\mu'')r_\mu} e^{-i(x_\mu'' - x_\mu''')s_\mu} F(r, s). \tag{3.18}$$

Taking account of (3.18) and of the Fourier representations of the D and $\Delta^{(1)}$ functions, we find after a short computation

[5] On account of the appearance of one dimensional delta functions in (3.12) the four-vectors p_λ and q_λ are time-like $p_\mu^2 = q_\mu^2 = -m^2$.

$$A = (2\pi)^{-6} \int dx' \int dp \int dq\, F(p,q)\, F(-q,-p)\, \frac{\delta(p_\mu^2 + m^2)\, \delta(q_\nu^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2}. \quad (3.19)$$

Since $F(p, q)$ must be Lorentz invariant, it may depend only on p_μ^2, q_ν^2 and $p_\lambda q_\lambda$, but owing to the appearance of two delta functions in (3.19) it depends effectively only upon $p_\lambda q_\lambda$. Denoting

$$F(p, q)\, F(-q, -p)_{[p_\mu^2 = q_\mu^2 = -m^2]} = \Phi\,(p_\mu q_\mu) > 0, \quad (3.20)$$

we have

$$A = (2\pi)^{-6} \Omega_\infty \int dp \int dq\, \Phi(p_\mu q_\mu)\, \frac{\delta(p_\mu^2 + m^2)\, \delta(q_\nu^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2}. \quad (3.21)$$

Thus A is divergent on account of the appearance of the infinite "volume" Ω_∞. Nevertheless, let us investigate whether at least the remaining integrations in (3.21) are meaningful. On account of the effective time-like character of p_μ we may again compute the invariant integral over $\int dq$ in the frame of reference where $\vec{p} = 0$. We have[6]

$$J = \int dq\, \Phi\,(p_\mu q_\mu)\, \frac{\delta(q_\nu^2 + m^2)}{(p_\lambda + q_\lambda)^2} = \frac{1}{2m} \int dq\, \Phi\,(|\, m q_0\, |)\, \frac{\delta(q_\nu^2 + m^2)}{m + q_0} \quad (3.22)$$

$$= 2\pi \int_0^\infty dq\, \Phi\,(|\, m\, | \sqrt{q^2 + m^2})\, \frac{1}{\sqrt{q^2 + m^2}} = J\,(m).$$

By a suitable choice of the form factor (i. e. with a suitable Φ) the integral (3.22) may be made convergent. However, it is independent of p_μ, so that the integral over dp remains exactly the same as in the local theory. Hence

$$A = (2\pi)^{-4}\, \Omega_\infty\, J(m) \int_0^\infty dp\, \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (3.23)$$

is a product of two divergent factors, an infinite "volume", and a logarithmically divergent integral. Thus the introduction of a form factor has been of little help in this situation. In view of this result one may be inclined to draw a negative conclusion concerning the possibility of a regular field theory, i. e. a formalism whose results were expressible as a power series in the coupling constant. Such a conclusion would be premature. We shall show that both divergences in (3.23) are intimately connected with the infinite space time domain[7] and disappear by a restriction to a finite space time domain.

Let us consider two space-like hypersurfaces σ_1 and σ_2 inclosing a finite space-time domain Ω and assume that a vacuum state is realized at σ_1. We ask for the probability

[6] We assume that $\Phi(p_\mu\, q_\mu)$ depends only upon the absolute value $|p_\mu\, q_\mu|$.

[7] The fact that the logarithmically divergent integral in (3.23) is connected with an infinite domain is made plausible by the remark that an integration over the whole space-time has been performed beforehand.

of finding a vacuum state on σ_2. This probability amplitude is given by the above expression with limits of integration σ_1 and σ_2. Let us discuss again the typical terms A and B given by (3.12). With a finite domain of integration the use of the Fourier transforms of the $\bar{D}$ and $\Delta^{(1)}$ functions is not adequate. Instead, we may take advantage of the well known representations of these functions in the x-space (Schwinger 1949)

$$\bar{D} = \frac{1}{4\pi}\delta(x_\mu^2), \qquad \Delta^{(1)} = \frac{1}{2\pi^2 x_\mu^2} + f(x_\mu^2) \tag{3.24}$$

where $f(x^2)$ is only logarithmically divergent for $x_\mu^2 \to 0$. It suffices to discuss the strongest singularities

$$A' = 4(2\pi)^{-6}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\delta(\lambda)\frac{1}{\lambda^2}, \qquad B' = 4(2\pi)^{-6}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\delta(\lambda)\frac{1}{\lambda^3} \tag{3.25}$$

where

$$\lambda = -(x_\mu - y_\mu)^2. \tag{3.25'}$$

The above expressions are meaningless on account of a coincidence of $\delta(\lambda)$ with λ^{-2} or λ^{-3}. Thus, the local formalism yields divergent results notwithstanding whether the space-time domain is finite or not. However, the situation changes completely by passing to a non-local theory.

In order to avoid unessential complications we shall disregard the elaborate form of the form factor (2.1) and assume for simplicity that the form factor is

$$F(x',x'',x''') = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxG(x'-x)\,F(x''-x)\,G(x'''-x). \tag{3.26}$$

To secure the convergence of A' it is sufficient to use even a simpler form factor

$$F(x',x'',x''') = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx\delta(x'-x)\,F(x''-x)\delta(x'''-x). \tag{3.27}$$

In this case A' becomes

$$A' = 4(2\pi)^{-6}\iiiint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdydx''dy''\,F(x''-x)\delta(\lambda'')\,F(y''-y)\,\frac{1}{\lambda^2} \tag{3.28}$$

$$|A'| \leqslant 4(2\pi)^{-6}M^2\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\frac{1}{\lambda^2}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx''dy''\delta(\lambda'') \tag{3.29}$$

if only the form factor $F(x''-x)$ is limited

$$|F(x''-x)| \leqslant M. \tag{3.30}$$

Since the integrals over a finite domain of the primed and not primed variables are convergent separately (cf. Appendix III) A' is limited and the whole expression A becomes meaningful. On the other hand, the simplest form factor (3,27) cannot secure the convergence of B which contains still a divergent integral

$$J = \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy \frac{1}{\lambda^3}. \tag{3.31}$$

In this case we have to use more general form factors of the type (3.26) with limited functions F and G. Thereby (3.31) turns into

$$J = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cdots \int dxdydx'dy'dx'''dy''' \, G(x-x')G(y-y')\, G(x-x''')\, G(y-y''') \frac{(x'''-y')_\nu (y'''-x')_\nu}{[(x_\lambda'''-y_\lambda')^2]^2\,[(y_\mu'''-x_\mu')^2]^2}. \tag{3.32}$$

$$|J| \leqslant M^4 \Omega^2 \sum_\nu \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx'''dy' \frac{|x_\nu'''-y_\nu'|}{[(x_\lambda'''-y_\lambda')^2]^2} \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx'dy''' \frac{|x_\nu'-y_\nu'''|}{[(x_\mu'-y_\mu''')^2]^2}. \tag{3.32'}$$

Here the two integrals are convergent separately. Thus, with the aid of suitable limited form factors, the terms of the type B are also finite in a finite domain.

The above discussion shows how essential the assumption of a finite space-time domain is for a consistent application of the perturbation methods based on a power series expansion in terms of the coupling constant.

Additional remarks

(i) The reason for breaking down of the power series expansion in the case of an infinite domain is probably the same as in the case of bound states. Bound states are known to be solutions of homogeneous instead of inhomogeneous integral equations in an infinite space-time,[8] so that ψ describing a stationary state cannot be obtained by iteration from a free wave ψ^{σ_1} (with $\sigma_1 \to -\infty$).

(ii) The following remark should be added for completness sake: by introducing a suitable mixture of charged fields obeying Fermi-Dirac and Bose-Einstein statistics the singularities of the integrands appearing in the vacuum state problem may be compensated. Thus, realistic compensation (Jost and Rayski 1949) attains in this case the same aim as the form factors. But also in the case of a realistic compensation we have to take a finite space time domain (except in the case of equal masses of fermions and bosons whereby the probability amplitudes compensate exactly to a value zero; but the case of equal masses is not realized in Nature).

[8] Cf. W. Zimmermann (1953).

Appendix I

From (1.18′) the second order approximation $K^{(2)}$ satisfies the relation

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(2)}] = \frac{e}{4}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy D(x-y)([\overline{\psi}^{(1)}(y), \gamma_\mu \psi^{(o)}(y)] + [\overline{\psi}^{(o)}(y), \gamma_\mu \psi^{(1)}(y)]) \qquad (I.1)$$

where $\psi^{(1)}$ and $\overline{\psi}^{(1)}$ are the first order corrections to be computed from (1.10″) and its complex conjugate respectively

$$\psi^{(1)}(y) = \frac{e}{i}\int dz \overline{S}(y-z) A_\nu^{(o)}(z)\gamma_\nu \psi^{(o)}(z) \qquad (I.2)$$

$$\overline{\psi}^{(1)}(y) = \frac{e}{i}\int dz A_\nu^{(o)}(z)\overline{\psi}^{(o)}(x)\gamma_\nu \overline{S}(z-y). \qquad (I.3)$$

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(2)}] = \frac{e^2}{4i}\delta_{\mu\nu}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy dz D(x-y) A_\varrho^{(o)}(z)\{\ \}_{\nu\varrho} \qquad (I.4)$$

where

$$\{\ \}_{\nu\varrho} = \{[\overline{\psi}^{(o)}(z)\gamma_\varrho \overline{S}(z-y), \gamma_\nu \psi^{(o)}(y)] + [\overline{\psi}^{(o)}(y), \gamma_\nu \overline{S}(y-z)\gamma_\varrho \psi^{(o)}(z)]\}. \qquad (I.4')$$

As (I.4′) is symmetric with respect to the substitutions $z \rightleftarrows y$, $\varrho \rightleftarrows \nu$, we may write (I.4) also in the form

$$[A_\mu^{(o)}(x), K^{(2)}] = -\frac{e^2}{8}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dy dz (i\delta_{\mu\nu} D(x-y) A_\varrho^{(o)}(z) + i\delta_{\mu\varrho} D(x-z) A_\nu^{(o)}(y))\{\ \}_{\nu\varrho} \qquad (I.5)$$

but the expression in the first bracket in (I.5) is

$$\frac{1}{2}(\{[A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(y)], A_\varrho^{(o)}(z)\} + \{[A_\mu^{(o)}(x), A_\varrho^{(o)}(z)], A_\nu^{(o)}(y)\}) =$$

$$= \frac{1}{2}[A_\mu^{(o)}(x), \{A_\nu^{(o)}(y), A_\varrho^{(o)}(z)\}]. \qquad (I.6)$$

In this way the right-hand side of (I. 5) is written also in the form of a commutator. By comparing both sides we infer

$$K^{(2)} = -\frac{e^2}{16}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx dy \{A_\mu^{(o)}(x), A_\nu^{(o)}(y)\}.\{\ \}_{\mu\nu} + (\text{a constant with respect to the } A_\nu\text{'s}) \qquad (I.7)$$

This "constant" may be still a function of $\psi^{(o)}$ and $\overline{\psi}^{(o)}$. In order to determine it, we use (1.18″)

$$[\psi^{(o)}(x), K^{(2)}] = -\frac{e}{4}\int_{\sigma} dy S(x-y)(\{A_\mu^{(o)}(y), \gamma_\mu \psi^{(1)}(y)\} + \{A_\mu^{(1)}(y), \gamma_\mu \psi^{(o)}(y)\}). \qquad (I.8)$$

The computation of the first term, containing $\psi^{(1)}$, would yield again the first term of (I.7) just exibiting the compatibility of (I.4) with (I.8). We shall not compute again this term. The second term in (I.8) with

$$A_\mu^{(1)}(y) = e\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dz\bar{D}(y-z)j_\mu^{(o)}(z) \tag{I.9}$$

s independent of $A_\mu^{(o)}$ and determines the remaining part of (I.7). For its computation t is sufficient to use a non-symmetrized form of the current fourvector. Thus,

$$-\frac{e^2}{4}\iint dydz\, S(x-y)\{j_\mu^{(o)}(z),\gamma_\mu\psi^{(o)}(y)\}\bar{D}(y-z)$$

$$= -\frac{ie^2}{4}\iint dydz\, S(x-y)\{\bar{\psi}^{(o)}(z)\gamma_\mu\psi^{(o)}(z),\gamma_\mu\psi^{(o)}(y)\}\bar{D}(y-z)$$

$$= -\frac{ie^2}{4}\iint dydz\, S_{\alpha\beta}(x-y)\{\bar{\psi}_\delta^{(c)}(z)\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y) + \psi_\gamma^{(o)}(y)\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)\psi_\eta^{(o)}(z)\}\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z)$$

$$= -\frac{ie^2}{4}\iint dydz\, S_{\alpha\beta}(x-y)(\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y) - \bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y)\psi_\eta^{(o)}(z) +$$

$$+ \{\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z),\psi_\gamma^{(o)}(y)\}\psi_\eta^{(o)}(z))\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z)$$

$$= -\frac{ie^2}{4}\iint dydz\, S_{\alpha\beta}(x-y)\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)(\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y) - \psi_\gamma^{(o)}(y)\psi_\eta^{(o)}(z))\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z)$$

$$-\frac{ie^2}{4}\iint dydz\, S_{\alpha\beta}(x-y)\frac{1}{i}S_{\gamma\delta}(y-z)\psi_\eta^{(o)}(z)\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z) = a+b\,. \tag{I.10}$$

The first integral a may be antisymmetrized

$$a = -\frac{ie^2}{8}\iint dydz\, (S_{\alpha\beta}(x-y)\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z) - S_{\alpha\delta}(x-z)\bar{\psi}_\beta^{(o)}(y))(\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y) -$$

$$-\psi_\gamma^{(o)}(y)\psi_\eta^{(o)}(z))\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z)$$

$$= \frac{e^2}{4}\iint dydz\, (\{\psi_\alpha^{(o)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(o)}(y)\}\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z) - \{\psi_\alpha^{(o)}(x),\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)\}\bar{\psi}_\beta^{(o)}(y))\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y)\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z)$$

$$= \frac{e^2}{8}\iint dydz[\psi_\alpha^{(o)}(x),[\bar{\psi}_\beta^{(o)}(y),\bar{\psi}_\delta^{(o)}(z)]]\psi_\eta^{(o)}(z)\psi_\gamma^{(o)}(y)\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z) \tag{I.11}$$

while the second term b is

$$b = \frac{e^2}{4}\iint dydz[\psi_\alpha^{(o)}(x),\bar{\psi}_\beta^{(o)}(y)\psi_\eta^{(o)}(z)]\frac{1}{i}S_{\gamma\delta}(y-z)\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\bar{D}(y-z), \tag{I 12}$$

whence this part of $K^{(2)}$ which we are computing becomes

$$\frac{e^2}{8}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dydz\,([\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y),\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)]\psi^{(o)}_\eta(z)\psi^{(o)}_\gamma(y) + + 2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\psi^{(o)}_\eta(z)\frac{1}{i}S_{\gamma\delta}(y-z))\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma^\mu_{\delta\eta}\overline{D}(y-z). \tag{I.13}$$

By rearranging the terms in (I. 13), we get

$$[\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y),\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)]\psi^{(o)}_\eta(z)\psi^{(o)}_\gamma(y) = 2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)\psi^{(o)}_\eta(z)\psi^{(o)}_\gamma(y) = -2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)\psi^{(o)}_\gamma(y)\psi^{(o)}_\eta(z)$$
$$= 2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\psi^{(o)}_\gamma(y)\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)\psi^{(o)}_\eta(z) - 2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\{\psi^{(o)}_\gamma(y)\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)\}\psi^{(o)}_\eta(z)$$
$$= 2\,\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\psi^{(o)}_\gamma(y)\overline{\psi}^{(o)}_\delta(z)\psi^{(o)}_\eta(z) - 2\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\psi^{(o)}_\eta(z)\frac{1}{i}S_{\gamma\delta}(y-z),$$

the last term cancels the second one in (I.13) and we are left with

$$\frac{e^2}{4}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dydz\,\overline{\psi}^{(o)}(y)\gamma_\mu\psi^{(o)}(y).\,\overline{\psi}^{(o)}(z)\gamma_\mu\psi^{(o)}(z) = -\frac{e^2}{4}\iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dydz\, j^{(o)}_\mu(y).\, j^{(o)}_\mu(z) \tag{I.14}$$

which is just the second term in (I.7). In this way we have demonstrated formula (1.33) up to a meaningless constant (independent of $\psi,\overline{\psi}$, and A_μ).

Appendix II

For the derivation of the vacuum expectation values (3.2) the following formulae are needed

$$Tr\gamma_\mu = Tr\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\pi = 0,\ Tr\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu},\ Tr\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\pi\gamma_\varrho = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\pi\varrho} + + \delta_{\nu\pi}\delta_{\varrho\mu} - \delta_{\mu\pi}\delta_{\nu\varrho}), \tag{II.1}$$

$$\langle 0|\{A^{(o)}_\mu(x),A^{(o)}_\nu(y)\}|0\rangle = \delta_{\mu\nu}D^{(1)}(x-y) \tag{II.2}$$

and

$$\langle 0|\psi^{(o)}_\alpha(x)\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)|0\rangle = -i\,S^+_{\alpha\beta}(x-y),\quad \langle 0|\overline{\psi}^{(o)}_\beta(y)\psi^{(o)}_\alpha(x)|0\rangle = -i\,S^-_{\alpha\beta}(x-y) \tag{II.3}$$

where

$$S^+ + S^- = S,\quad i(S^+ - S^-) = S^{(1)}. \tag{II.4}$$

Let us compute e. g. the last term in (3.2) with $K^{(1)}$ given by (1.30)

$$-2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle = -\frac{e^2}{2}\iint dxdy\langle 0|j_\mu(x)\,j_\nu(y)|0\rangle\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle \tag{II.5}$$

where the indices (*0*) have been dropped to simplify the notation. The vacuum expectation value could be factorized on account of the independence of the free photon and free electron spaces. Writting

$$A_\mu(x)A_\nu(y) = \frac{1}{2}\{A_\mu(x),A_\nu(y)\} + \frac{1}{2}[A_\mu(x),\,A_\nu(y)], \tag{II.6}$$

we have

$$\langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}D^{(1)}(x-y) + i\,D(x-y). \tag{II.7}$$

The vacuum expectation value of the product of two current four-vectors is

$$\langle 0|j_\mu(x)\,j_\nu(y)|0\rangle = Tr\gamma_\mu S^+(x-y)\gamma_\nu S^-(y-x). \tag{II.8}$$

This last formula may be obtained by dividing the operators ψ (and $\bar\psi$) into positive and negative frequency parts $\psi = \psi^+ + \psi^-$ and rearranging the order of terms in such a way that the annihilation operators $\psi^+, \bar\psi^+$ stand to the right and the creation operators $\psi^-, \bar\psi^-$ to the left. The rearranged expression is zero on account of

$$\psi^+|0\rangle = \bar\psi^+|0\rangle = 0 \tag{II.9}$$

(in a vacuum state there are no particles to be annihilated). But changing the order of operators is connected with the appearence of anticommutators

$$\{\psi_\alpha^\pm(x), \bar\psi_\beta^\mp(y) = -i\,S_{\alpha\beta}^\pm(x-y) \tag{II.10}$$

which leads finally to (II.8).

With (II. 7) and (II. 8), we have

$$-2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle = -\frac{e^2}{4}\iint dxdy Tr\,\gamma_\mu S^+(x-y)\gamma_\mu S^-(y-x)(D^{(1)}(x-y) + $$
$$+\,i\,D(x-y)). \tag{II.11}$$

Using expressions analogous to (1.6) for S^+ and S^- and (II.I), we get

$$-2\langle 0|(K^{(1)})^2|0\rangle = 2e^2\iint dxdy\left(\frac{\partial\Delta^+(x-y)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\Delta\ \ (y-x)}{\partial y_\nu}\right.$$
$$-\,2m^2\,\Delta^+(x-y)\Delta^-(y-x))(D^{(1)}(x-y) + i\,D(x-y)) \tag{II.12}$$

Replacing $\Delta^\pm$ by Δ and $\Delta^{(1)}$ with the aid of the formulae

$$\Delta^\pm = \frac{1}{2}(\Delta \pm i\,\Delta^{(1)}) \tag{II.13}$$

and noticing that some of the terms vanish for symmetry reasons, we get finally formula (3.4). Formula (3.3) may be computed quite similarly.

Appendix III

To show that the integral

$$J = \iint_{\sigma_1}^{\sigma_2} dxdy\,\frac{1}{[(x_\mu - y_\mu)^2]^2} \tag{III.1}$$

is convergent in the case of a finite space-time domain Ω restricted by the hypersur-

faces σ_1 and σ_2, we notice that the integrand is positive definite, whence we may consider a convenient larger domain enclosing Ω

$$J < \int_V d^3x \int_V d^3y \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dx_o \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dy_o \frac{1}{[(x_\mu - y_\mu)^2]^2}$$
$$= \frac{\tau}{2} \int_V d^3x \int_V d^3y \frac{1}{r^3} \ln \left| \frac{r+\tau}{r-\tau} \right| \tag{III.2}$$

where r denotes the three-dimensional distance

$$r = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2}. \tag{III.3}$$

If V denotes a sphere with the radius ϱ, then r is always smaller than 2ϱ and we may majorize (III. 2) again by integrating with respect to the variables $x - y$ over a sphere K with radius 2ϱ

$$J < \frac{\tau}{2} \int_V d^3x \int_K d^3(x-y) \frac{1}{r^3} \ln \left| \frac{r+\tau}{r-\tau} \right| = \frac{8\pi^2}{3} \tau \varrho^3 \int_o^{2\varrho} dr \frac{1}{r} \ln \left| \frac{r+\tau}{r-\tau} \right| \tag{III.4}$$

and this last integral is obviously convergent.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

И. Райский, *Теория поля без расходимости III.*

Метод возмущений применяемый к локальной как и нелокальной теории поля представлен и применён к вычислению амплитуды вероятности того, что состояние вакуума остаётся состоянием вакуума. Нтобы гарантировать конвергенцию, необходимо принять (кроме не-локальности взаимодействия) определённую область пространства — времени. Показано тоже, что в нелокальной теории поля амплитуды вероятности не могут быть выражены при помощи каузальных функций Штюкельберга и Файнмана.

REFERENCES

Jost R. and Rayski J., *Helv. phys. Acta*, **22**, 457 (1949).
Kallén G., *Ark. Fys.* **23**, 71 (1950).
Rayski J., *Phil Mag.*, **42**, 1289 (1951).
Rayski J., *Acta phys. Polon.*, **11**, 314 (1952), **12** (1953).
Rayski J., *Nuovo Cimento* **10**, 1 (1953).
Schwinger J., *Phys. Rev.*, **75**, 651 (1949).
Stueckelberg G. and River D., *Phys. Rev.*, **74**, 218 (1948).
Yang C. N. and Feldman D., *Phys. Rev.*, **79**, 972 (1950).
Zimmerman W., *Z. Phys.*, **135**, 475 (1953).

ÜBER DIE FORTPFLANZUNG UNSTETIGER ELEKTROMAGNETISCHER SIGNALE IN WELLENLEITERN

Von A. Rubinowicz

Staatliches Mathematisches Institut, Warszawa

(Eingegangen am 5. November 1953)

Es wurde die strenge Lösung für das Problem der Fortpflanzung eines unstetigen elektromagnetischen Signals in einem Wellenleiter angeben, das entsteht falls in den Wellenleiter eine monochromatische elektromagnetische Welle von einem bestimmten Zeitpunkt an eingestrahlt wird. Ist die Wellenlänge der monochromatischen Welle kleiner als die zum gleichen Wellentyp gehörige Grenzwellenlänge, so entsteht auf diese Weise eine fortschreitende Welle, die aus zwei Teilen nämlich aus den Vorläufern und der Hauptwelle zusammengesetzt ist.

Die Vorläufer beginnen mit einer Wellenfront, die sich mit der Geschwindigkeit von freien elektromagnetischen Wellen in dem Medium ausbreitet, das den Wellenleiter erfüllt. Die elektromagnetischen Feldstärken in der Wellenfront haben die Werte, die die eingestrahlte Welle an der Einstrahlstelle in dem Momente besitzt, in dem das Einstrahlen beginnt.

Gleich darauf flauen aber die Feldstärken ab, bis mit der Gruppengeschwindigkeit die Hauptwelle ankommt. In ihr steigen die elektromagnetischen Feldstärken wieder an, da sich rasch der asymptotische Zustand einstellt, der einer fortschreitenden monochromatischen Welle entspricht.

In der vorliegenden Arbeit werden konvergente Reihenentwicklungen nach Besselschen Funktionen und Näherungsformeln zur Berechnung der elektromagnetischen Feldstärken in den Vorläufern und in der Hauptwelle angegeben.

Das Verhältnis der durch einen bestimmten Querschnitt zu einer bestimmten Zeit strömenden Energie, zur mittleren Energieströmung im asymptotisch sich einstellenden monochromatischen Fall ist für einen gegebenen Wellentyp von der Gestalt des Querschnittes vollkommen unabhängig. Die in der Arbeit angegebenen Entwicklungen ermöglichen die Berechnung der Energieverluste, die bei der Signalübermittlung durch die Abweichung der Wellenbewegung von dem rein monochromatischen Fall entstehen.

Es wird auch eine strenge Lösung des behandelten Problems für den Fall angegeben, der einem exponentiellen Ansteigen der elektromagnetischen Schwingungen in der Senderöhre entspricht. Diese Lösung wird jedoch nicht näher diskutiert.

§ 1. *Problemstellung.*

In einer in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit des Verfassers (1950) wurde ein Problem der Fortpflanzung von de Brogliesçhen Materiewellen behandelt, das am

besten wohl mit dem Schlagwort „Einstrahlproblem" bezeichnet werden kann. Man kann es in der folgenden Weise formulieren:

In einen durch eine Ebene E begrenzten Raum R, in dem zu den Zeiten $t < 0$ keine de Broglie-Wellen vorhanden sind, wird von der Zeit $t = 0$ an, von der Ebene E aus und zwar in der Richtung senkrecht zu ihr eine monochromatische ebene de Broglie-Welle eingestrahlt. Der in dem Raume R einsetzende Wellenvorgang besteht dann aus den im allgemeinen sehr schwachen Vorläufern, deren Wellenfront sich mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit ausbreitet und aus einer Hauptwelle, die mit der Gruppen-(= Partikel-) Geschwindigkeit fortschreitet und die erst den vollen Anteil an Energie enthält.

Genau das gleiche Problem wurde späterhin für die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in der Ionosphäre von P. Poincelot (1952, 1953) gelöst. Vom mathematischen Standpunkt ist dieses Problem als ein gemischtes zu bezeichnen, da sowohl Anfangsbedingungen (zur Zeit $t = 0$) als auch Randbedingungen (in der Ebene E) vorgegeben sind. Mit einem hierhergehörigen reinen Anfangswertproblem für die de Broglieschen Wellen hat sich Marcos Moshinsky (1951) beschäftigt.

Dem gleichen Dispersionsgesetz, das für die de Broglieschen Materiewellen und die elektromagnetischen Wellen in der Ionosphäre gilt, unterliegen aber auch die elektromagnetischen Wellen, die sich in Wellenleitern ausbreiten, deren Wände aus vollkommenen Leitern bestehen. Da die Radar-Technik mit zeitlich unstetigen, in die Wellenleiter eingestrahlten Wellenimpulsen arbeitet, so werden auch hier vor der mit der Gruppengeschwindigkeit fortschreitenden Hauptwelle, die haupsächlich aus einer monochromatischen Welle besteht, Vorläufer auftreten. Da diese letztere Wellenbewegung nicht die Frequenz der Haupwelle besitzt, so geht die in ihr enthaltene Energie, für die Signalübermittlung verloren. Ein noch erheblicherer Energieverlust wird dadurch bedingt, daß auch die Hauptwelle nicht rein monochromatisch ist. Es entsteht daher die Aufgabe, diese Energieverluste zu berechnen. In der vorliegenden Arbeit werden durch die Angabe einer strengen Lösung des Einstrahlproblems von elektromagnetischen Wellen in einen Wellenleiter die Grundlagen für eine solche Berechnung gegeben. Die Berechnung der Gesamtverluste muß aber auf numerischem Wege erfolgen und wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt. Überdies beschränken wir uns hier hauptsächlich auf die Energieverluste in den Vorläufern, geben aber auch die Formeln an, die notwendig sind um die Verluste in der Hauptwelle zu berechnen.

§ 2. *Elektromagnetische Wellen in Wellenleitern.*

Im folgenden betrachten wir, um einem konkreten Fall vor Augen zu haben, nur elektromagnetische Wellen vom transversalen elektrischen Typ in einem Wellenleiter vom beliebigen aber konstanten Querschnitt Q, der von vollkommen leitenden Wänden eingeschlossen wird und mit einem Medium von der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ erfüllt ist. Die Verallgemeinerung auf elektromagnetische

Wellen vom transversalen magnetischen Typ ist leicht zu bewerkstelligen und soll daher im folgenden nicht erörtert werden.

Lösungen der Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0,$$
$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{E}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \tag{2.1}$$

die Wellen vom transversalen elektrischen Typ entsprechen, werden durch den Ansatz

$$\vec{E} = \frac{\mu}{ck^2}\, \vec{n} \times \operatorname{grad}_2 \frac{\partial H_z}{\partial t},$$
$$\vec{H} = \frac{1}{k^2} \operatorname{grad}_2 \frac{\partial H_z}{\partial z} + \vec{n}\, H_z \tag{2.2}$$

erhalten, in dem die Longitudinal-Komponente H_z der magnetischen Feldstärke die Rolle einer Potentialfunktion spielt. Dabei bedeutet:

$\vec{n}$ den Einheitsvektor von der Richtung und dem Richtungssinn der positiven z-Achse, die den Erzeugenden des Wellenleiters parallel ist,

$\operatorname{grad}_2 = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}$ den zweidimensionalen Gradienten in der Querschnittsebene Q des Wellenleiters.

Die Ableitungen von H_z nach der Zeit t und der Koordinate z müssen dabei der zweidimensionalen Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0 \tag{2.3}$$

genügen, in der nur die Ableitungen nach x und y auftreten.

Die Ableitungen von H_z nach x und y erfüllen hingegen die Differentialgleichung der eindimensionalen de Broglie-Wellen

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = 0, \tag{2.4}$$

in der wiederum nur die Ableitungen nach z und t vorhanden sind.

v ist hier die Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{2.5}$$

der Ausbreitung von freien elektromagnetischen Wellen in dem Medium mit dem der Wellenleiter erfüllt ist[1].

Die in (2.3) auftretende Konstante k bestimmt durch die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_1} \tag{2.6}$$

die Grenzwellenlänge λ_1 der betrachteten speziellen Wellenbewegung vom transversalen elektrischen Typ.

Um die Grenzbedigungen für das elektromagnetische Feld an den vollkommen leitenden Wänden des Wellenleiters (Verschwinden der elektrischen Tangential- und der magnetischen Normalkomponenten) zu befriedigen, muß schließlich an der Begrenzung des Querschnitts Q die magnetische Feldkomponente H_z der Grenzbedingung $\partial H_z/\partial N = 0$ genügen, wo N die in der Querschnittsebene liegende Normale an die Querschnittsbegrenzung (d. h. an die Seitenwände des Wellenleiters) bezeichnet.

Eine Lösung des formulierten Problems wird erhalten, wenn man

$$H_z = \Phi(x,y)\ F(z,t) \tag{2.7}$$

setzt, wo $\Phi\ (x, y)$ eine Lösung der Schwingungsgleichung (2.3) und $F(z, t)$ eine solche der Wellengleichung (2.4) ist. Um die Grenzbedingung für H_z zu erfüllen genügt die Voraussetzung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0$$

an der Begrenzungskurve des Querschnitts Q.

Die die Grenzwellenlänge nach (2.6) bestimmende Konstante k wird dabei durch die Lösung des zur Schwingungsgleichung (2.3) gehörigen Eigenwertproblems festgelegt.

Geht man mit dem Ausdruck (2.7) in den Ansatz (2.2) ein, so erhält man für die elektromagnetischen Feldstärken die Ausdrücke

$$\vec{E} = \frac{\mu}{ck^2}\,(\vec{n} \times \mathrm{grad}_2 \Phi(x,y))\, F_t(z,t),$$

$$\vec{H} = \frac{1}{k^2}\,\mathrm{grad}_2\, \Phi(x,y)\ F_z(z,t)\ + \vec{n}\ \Phi(x\ y) F(z,t), \tag{2.8}$$

---

[1] Die Differentialgleichungen (2.3) und (2.4) werden auch erhalten, wenn man von der Tatsache ausgeht, das H_z eine Lösung der dreidimensionalen Wellengleichung

$$\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} - \Delta\, H_z = 0$$

ist und man sie mit Hilfe des Ansatzes (2.7) durch Separation der Variablen zu lösen versucht.

wo

$$F_t(z,t) = \frac{\partial F(z,t)}{\partial t}, \qquad F_z(z,t) = \frac{\partial F(z,t)}{\partial z} \tag{2.9}$$

bedeutet.

Insbesondere ergibt die spezielle Wahl

$$F_0(z,t) = \cos(\omega_0 t - \varkappa_0 z - \alpha) \tag{2.10}$$

der Funktion $F(z, t)$ eine monochromatische, in der Richtung der positiven z-Achse fortschreitende Wellenbewegung. Mit Rücksicht auf die de Brogliesche Wellengleichung (2.4) muß zwischen den Konstanten ω_0 und $\varkappa_0$ der Zusammenhang

$$k^2 = \frac{\omega_0^{\,2}}{v^2} - \varkappa_0^{\,2} \tag{2.11}$$

bestehen, der die Dispersion, der in einem Wellenleiter sich ausbreitenden elektromagnetischen Wellen bestimmt. Die Phasengeschwindigkeit der der Funktion (2.10) entsprechenden Wellenbewegung wird durch

$$v_{ph} = \frac{\omega_0}{\varkappa_0} \tag{2.12}$$

und ihre Gruppengeschwindigkeit durch

$$v_g = \frac{d\omega_0}{d\varkappa_0} = v\left(1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2} \tag{2.13}$$

gegeben, wobei ω_1 durch

$$k = \frac{\omega_1}{v} \tag{2.14}$$

definiert ist, also nach (2.6) die der Grenzwellenlänge λ_1 und der Ausbreitungsgeschwindigkeit v entsprechende Kreisfrequenz bedeutet. ω_1 kann also als die Grenzkreisfrequenz bezeichnet werden. Zwischen v_{ph} und v_g besteht mit Rücksicht auf (2.11) und (2.14) der aus der Theorie der de Broglieschen Wellen bekannte Zusammenhang

$$v_{ph}\, v_g = v^2. \tag{2.15}$$

Im folgenden wird uns insbesondere der durch die Querschnittsfläche Q des Wellenleiters fließende Energiestrom

$$\int\limits_Q S_n df = \frac{c}{4\pi}\int\limits_Q \vec{n}(\vec{E} \times \vec{H})\, df \tag{2.16}$$

interessieren. Setzen wir hier für die Feldstärken die Werte (2.8) ein so erhalten wir für den Energiestrom (2.16) den Ausdruck

$$\int\limits_Q S_n\, df = -\frac{\mu}{4\pi k^4} F_t(z,t)\; F_z(z,t) \int\limits_Q (\mathrm{grad}_2\, \Phi)^2\, df. \tag{2.17}$$

Verwendet man in (2.17) für $F(z,t)$ insbesondere die Funktion (2.10), die einer fortschreitenden, monochromatischen, elektromagnetischen Welle entspricht, so erhält man für den Mittelwert des Energiestromes den Ausdruck

$$\int\limits_{Q} S_n^* \, df = \frac{\mu}{4\pi k^1} \frac{\omega_0 \varkappa_0}{2} \int\limits_{Q} (\mathrm{grad}_2 \, \Phi)^2 df. \tag{2.18}$$

Für das Verhältnis der beiden Energieströme (2.17) und (2.18) folgt somit die einfache Beziehung

$$\frac{\int\limits_{Q} S_n \, df}{\int\limits_{Q} S_n^* \, df} = - \frac{2}{\omega_0 \varkappa_0} F_t(z,t) \, F_z(z,t). \tag{2.19}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß beide Wellen zum gleichen Wellentyp gehören d. h. mit der gleichen Lösung Φ der Schwingungsgleichung (2.3) gebildet sind.

Die im nächsten Paragraphen anzugebende Funktion $F(z, t)$ wird nach der Ankunft der Hauptwelle asymptotisch durch die monochromatische Welle (2.10) gegeben. Den Ausdruck (2.19) werden wir daher verwenden können, um das uns interessierende Verhältnis der Energieströmung in den Vorläufern zu der mittleren Energieströmung anzugeben, die asymptotisch in der Hauptwelle auftritt. Der Ausdruck (2.19) ist dadurch ausgezeichnet, daß er nicht mehr das über den Querschnitt Q erstreckte Integral enthält. Das angegebene Verhältnis der Energieströme ist somit von der Gestalt des Querschnittes des Wellenleiters vollkommen unabhängig.

Der Ausdruck (2.10) für die fortschreitende monochromatische Welle gilt nur in dem Falle $\omega_0 > \omega_1$, wo die Kreisfrequenz ω_0 der Welle größer ist, als die Grenzkreisfrequenz ω_1. Die angegebene Bedingung ist nämlich nach (2.11) und (2.14) erforderlich, damit $\varkappa_0$ eine reelle Größe ist. Daher sind auch die Ausdrücke (2.18) und (2.19) nur in dem Falle $\omega_0 > \omega_1$ benutzbar.

§ 3. *Die Funktion* $F(z,t)$.

Wir erhalten stets eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen (2.1), die der Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen vom transversalen elektrischen Typ in einem Wellenleiter entspricht, sobald wir für die in (2.8) auftretende Funktion $F(z,t)$ eine beliebige Lösung der de Broglieschen Wellengleichung (2.4) einsetzen. Verwenden wir insbesondere den Realteil der vom Verfasser (1950) angegebenen Lösung $f(z,t)$, so erhalten wir — wie die nachfolgende Diskussion zeigt — einen Wellenvorgang, der im Spezialfalle $a = \pi/2$ einem Einstrahlen von *TE* Wellen in einen Wellenleiter entspricht. Die komplexe Funktion $f(z, t)$ wird durch das Integral

$$f(z,t) = \frac{e^{ia}}{2\pi i} \int\limits_{(U)} e^{w} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0}, \quad w = -i(\omega t - \varkappa z) \tag{3.1}$$

gegeben. Hier ist

$$\varkappa = \frac{1}{v}(\omega^2 - \omega_1^2)^{1/2} \tag{3.2}$$

zu setzen, wo ω_1 durch (2.14) bestimmt wird. Das im Integral auftretende e^{w} und daher auch die Funktion $f(z,t)$ sind ja eine Lösung der de Broglieschen Wellengleichung (2.4).

Um den Integrationsweg (U) anzugeben, bemerken wir zunächst, daß die im Integranden in (3.1) auftretende Funktion e^{w} mit Rücksicht auf das durch (3.2) gegebene $\varkappa$ auf einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche eindeutig ist, die in den beiden auf der reellen Achse liegenden Punkten $\omega = \pm\,\omega_1$ Verzweigungspunkte hat. Wir denken uns diese beiden Punkte durch einen auf der reellen Achse verlaufenden Verzweigungsschnitt verbunden und bezeichnen als das obere Blatt dieser Riemannschen Fläche dasjenige Blatt in dem im Unendlichen $\varkappa \sim +\,\omega/v$ wird. Der Integrationsweg (U) verläuft dann in dem oberen Blatt der komplexen ω - Ebene von $+\,\infty$ bis $-\,\infty$ der reellen Achse oberhalb der beiden Verzweigungspunkte $\omega = \pm\,\omega_1$ sowie oberhalb des ebenfalls auf der reellen Achse liegenden Poles $\omega = \omega_0$.

Wir wollen uns überzeugen, daß die Funktion (3.1) alle Bedingungen des in § 1 formulierten gemischten Problemes erfüllt.

Die Funktion $f(z, t)$ befriedigt zunächst für $z = 0$ die Randbedingung

$$f(0, t) = \left\langle \begin{array}{l} 0 \text{ für } t < 0, \\ e^{ia} e^{-i\omega_0 t} \text{ für } t > 0, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

wo ω_0 die Kreisfrequenz der eingestrahlten monochromatischen Welle bedeutet. Für $z = 0$ verschwindet nämlich im Integrale (3.1) die Abhängigkeit von $\varkappa$, so daß der Integrand schon in der einblättrigen komplexen ω - Ebene eindeutig wird. Für $t < 0$ kann der Integrationsweg (U) in das Unendliche der oberen ω - Halbebene verlagert werden, da ja dann hier $e^{-i\omega t}$ verschwindet. Es wird daher $f(0, t) = 0$. Für $t > 0$ kann hingegen der Integrationsweg (U) in das Unendliche der unteren Halbebene deformiert werden, da ja in diesem Falle hier $e^{-i\omega t}$ verschwindet. Dabei bleibt er aber an dem Pol $\omega = \omega_0$ hängen und das Residuum liefert den für $t > 0$ in (3.3) angegebenen Wert.

Das Erfülltsein der Anfangsbedingungen ergibt sich aus der Tatsache, daß für die Raum-Zeit-Punkte $z > vt > 0$ der Integrand in (3.1) im Unendlichen der oberen ω-Halbebene und somit auch das ganze Integral (3.1) verschwindet. Daher wird

$$f(z,t) = 0 \text{ für } z - vt > 0. \tag{3.4}$$

Damit ist aber auch bereits gezeigt, daß die Wellenfront sich höchstens mit der Geschwindigkeit v ausbreitet.

Eine nähere Diskussion der Funktion (3.1) für $z - vt < 0$ zeigt aber, daß die Fortpflanzung der Wellenfront tatsächlich mit dieser Geschwindigkeit erfolgt. Da in diesem Falle der Integrand im Unendlichen der unteren Halbebene verschwindet, kann nun der Integrationsweg (U) zu einer vollen Schleife ergänzt werden, die die

beiden Verweigungspunkte $\omega = \pm\omega_1$ sowie den Pol $\omega = \omega_0$ umschließt. Wählt man, um späterhin in einfacher Weise Reihenentwicklungen nach Besselchen Funktionen zu erhalten, diesen Integrationsweg so daß **Re** $w = 0$ wird, so verläuft er in der ω - Ebene längs der durch

$$\omega = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\cos\psi + i\beta \sin\psi), \quad 0 \leqslant \psi < 2\pi \tag{3.5}$$

gegebenen Ellipse, wo

$$\beta = \frac{z}{vt} \tag{3.6}$$

bedeutet. Es wird dann

$$w = -i\,\eta \cos\psi,$$

wo

$$\eta = \frac{\omega_1}{v}\sqrt{v^2t^2 - z^2} = \omega_1 t\,\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.7}$$

Ferner wird in dem oberen Blatt der Riemannschen Fläche mit Rücksicht darauf, daß hier im Unendlichen $\varkappa \sim \omega/v$ ist:

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{1}{v}\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta \cos\psi + i \sin\psi), \\ d\omega &= i\varkappa v d\psi. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$\xi = \gamma\, e^{i\psi}, \text{ wo } \gamma = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}, \tag{3.9}$$

so wird nach (3.5) und (3.8)

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \\ v\varkappa &= \frac{\omega_1}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right), \\ \omega - \omega_0 &= \frac{\omega_1}{2}\frac{1}{\xi}(\xi - \gamma_0)\left(\xi - \frac{1}{\gamma_0}\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Setzen wir voraus, daß die Grenzkreisfrequenz ω_1 kleiner ist als die Kreisfrequenz ω_0 der einfallenden elektromagnetischen Strahlung ($\omega_1 < \omega_0$) so werden

$$\left.\begin{matrix}\gamma_0 \\ 1/\gamma_0\end{matrix}\right\} = \frac{\omega_0}{\omega_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 - 1} \tag{3.11}$$

reelle Zahlen sein.

Mit Rücksicht auf (3.8) und (3.10) folgt aus (3.1) nach kurzer Rechnung für die Funktion $f(z, t)$ schließlich der Ausdruck

$$f(z,t) = \frac{e^{ia}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^w A \, d\psi, \tag{3.12}$$

wo

$$A = \frac{\xi^2 - 1}{(\xi - \gamma_0)\left(\xi - \frac{1}{\gamma_0}\right)} = 1 + \frac{\gamma_0}{\xi - \gamma_0} + \frac{1}{\gamma_0} \frac{1}{\xi - \frac{1}{\gamma_0}} \tag{3.13}$$

bedeutet.

Setzt man

$$\begin{aligned} f_1(z,t) &= \frac{e^{ia}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^w \frac{\gamma_0}{\xi - \gamma_0} d\psi, \\ f_2(z,t) &= \frac{e^{ia}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^w \frac{1}{\gamma_0} \frac{1}{\xi - \frac{1}{\gamma_0}} d\psi \end{aligned} \tag{3.14}$$

und beachtet die Definition der Besselschen Funktionen

$$J_n(\ ) = \frac{i^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\cos\nu} e^{\pm in\nu} \, d\psi, \tag{3.15}$$

so kann die Funktion $f(z,t)$ auch in der Gestalt

$$f(z,t) = e^{ia} J_0(\eta) + f_1(z,t) + f_2(z,t) \tag{3.16}$$

dargestellt werden.

Bei der Diskussion der Funktionen $f_1(z,t)$ und $f_2(z,t)$ sind nun die beiden Fälle $\gamma > \gamma_0$ und $\gamma < \gamma_0$ zu unterscheiden. Unter der oben gemachten Voraussetzung, daß $\omega_0 > \omega_1$ ist besteht nach (3.11) die Ungleichung $\gamma_0 > 1$ so daß im Falle $\gamma > \gamma_0$ nach (3.9) sowohl $|\xi| > \gamma_0$ als auch $|\xi| > 1/\gamma_0$ ist. Wir können dann die Integranden in den Integralen (3.14) für die beiden Funktionen $f_1(z,t)$ und $f_2(z,t)$ nach Potenzen von γ_0/ξ bzw. $1/\ \gamma_0$ entwickeln und erhalten mit Rücksicht auf (3.15) die Reihen

$$\begin{aligned} f_1(z,t) &= e^{ia} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^n J_n(\eta), \\ f_2(z,t) &= e^{ia} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{(\gamma\gamma_0)^n} J_n(\eta). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Diese beiden Reihen sind insbesondere für die β-Werte $\beta \sim 1$ d. h. nach (3.6) gleich nach der Ankunft der Wellenfront zu gebrauchen, da ja dann γ nach (3.9)

einen sehr großen Wert besitzt so daß bereits wenige Glieder der Reihen (3.17) zur Berechnung der Funktionen $f_1(z,t)$ und $f_2(z,t)$ hinreichend sind. Mit wachsender Zeit nimmt aber nachher für einen gegebenen z - Wert der Wert von β ab.

Für $\beta \sim 1$ verläuft der durch (3.5) gegebene Integrationsweg sehr weit in der ω - Ebene, so daß er sicherlich den Pol $\omega = \omega_0$ und daher auch die Verzweigungspunkte $\omega = \pm \omega_1$ in seinem Innern einschließt. Sobald aber mit wachsender Zeit der Wert von β kleiner wird, tritt der Zeitmoment ein, wo der elliptische Integrationsweg (3.5) durch den Pol $\omega = \omega_0$ hindurchgeht. Nach (3.5) findet dies für den durch

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \tag{3.18}$$

gegebenen β - Wert β_0 statt. Aus (3.11) folgt dann

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\,. \tag{3.19}$$

Dem durch β_0 gegebenen Zeitpunkt entspricht nach (3.6) und (3.18) die Geschwindig keit

$$\frac{z}{t} = v\beta_0 = v\,\frac{(\omega_0^2-\omega_1^2)^{1/2}}{\omega_0}\,.$$

Diese Geschwindigkeit ist aber nach (2.13) gleich der Gruppengeschwindigkeit der betrachteten Wellenbewegung. Die Ausdrücke (3.17) sind daher gut konvergent für den Zeitabschnitt von der Ankunft der Wellenfront bis zum Zeitpunkt des mit der Gruppengeschwindigkeit eintreffenden Wellenzuges, den wir als die Hauptwelle bezeichnen.

Sobald jedoch der Integrationsweg (3.5) mit wachsender Zeit über den Pol $\omega = \omega_0$ hinwegstreicht, tritt zu dem Ausdruck (3.16) noch das Residuum von (3.1) hinzu d.h.

$$\text{Res} = e^{ia}\, e^{-i(\omega_0 t - \varkappa_0 z)}\,, \tag{3.20}$$

wo mit Rücksicht auf (3.2)

$$\varkappa_0 = \frac{1}{v}\,(\omega_0^2-\omega_1)^{1/2}\,.$$

Der Ausdruck (3.16) kann somit für alle Zeiten t in der Form

$$f(z,t) = e^{ia}\, J_0(\eta) + f_1(z,t) + f_2(z,t) + (\text{Res}) \tag{3.21}$$

dargestellt werden, wo (Res) andeuten soll, daß nach der durch $\beta = \beta_0$ gegebenen Zeit $t = t_0$ das Residuum (3.20) zu berücksichtigen ist.

Sobald $t > t_0$ und daher nach (3.6), (3.9) und (3.19) auch $\gamma < \gamma_0$ geworden ist, kann der Integrand der Funktion $f_1(z,t)$ (mit Rücksicht darauf, daß stets $\gamma \geqslant 1$ ist) nach Potenzen von ξ/γ entwickelt werden. Wir erhalten dann die Reihe

$$f_1(z,t) = -e^{ia} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{\gamma}{\gamma_0}\right)^n J_n(\eta), \tag{3.22}$$

während für $f_2(z,t)$ die Reihe (3.17) auch für $t > t_0$ giltig bleibt.

Es mag aber bemerkt werden, daß jede der beiden Darstellungen (3.17) und (3.22) für $f_1(z,t)$ sowohl für $\gamma > \gamma_0$ als auch für $\gamma < \gamma_0$ konvergiert. Für $\gamma = \gamma_0$ wird aber die Funktion $f_1(z,t)$ unstetig. Ihr Zweig für $\gamma > \gamma_0$ ist gleich dem um das Residuum (3.20) vermehrten Zweige für $\gamma > \gamma_0$. Man bestätigt leicht diese Tatsache mit Hilfe der erzeugenden Funktion für die Besselschen Funktionen $J_n(\eta)$ (vgl. Rubinowicz, 1950). Durch diesen Zusammenhang erklärt sich das Auftreten von (Res) in dem Ausdruck (3.21). Aus (3.17), (3.21) und (3.22) ergeben sich für $f(z,t)$ die Entwicklungen

$$f(z,t) = e^{ia}\{J_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n J_n(\eta)\gamma^{-n}(\gamma_0^n + \gamma_0^{-n})\},$$
$$f(z,t) = e^{ia}\{e^{-i(\omega_0 t - \varkappa_0 z)} - \sum_{=1}^{\infty}(-i)^n J_n(\eta)\gamma_0^{-n}(\gamma^n - \gamma^{-n})\}, \tag{3.23}$$

von denen die erste besser in dem Fall $\gamma > \gamma_0$ und die zweite besser in dem Fall $\gamma < \gamma_0$ konvergiert. Jede dieser beiden Entwicklungen ist jedoch in den beiden Fällen $\gamma \lesseqgtr \gamma_0$ verwendbar.

Für große η-Werte sind asymptotische Näherungen der beiden Funktionen (3.14) notwendig. Es wird dann

$$J_n(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\cos\left(\eta - \frac{2n+1}{4}\pi\right), \tag{3.24}$$

(o daß wir für die Funktionen $f_1(z,t)$ und $f_2(z,t)$ mit Rücksicht aut (3.17) und s3.22) die in den beiden Fällen $\gamma \lesseqgtr \gamma_0$ giltigen Näherungen

$$f_1(z,t) = -\frac{e^{ia}}{\sqrt{2\pi\eta}}\left\{\frac{e^{i(\eta-\pi/4)}}{1+\dfrac{\gamma}{\gamma_0}} + \frac{e^{-i(\eta-\pi/4)}}{1-\dfrac{\gamma}{\gamma_0}}\right\},$$
$$f_2(z,t) = -\frac{e^{ia}}{\sqrt{2\pi\eta}}\left\{\frac{e^{i(\eta-\pi/4)}}{1+\gamma\gamma_0} + \frac{e^{-i(\eta-\pi/4)}}{1-\gamma\gamma_0}\right\}, \tag{3.25}$$

erhalten. Sie sind jedoch nicht verwendbar für die Zeitmomente gleich nach der Ankunft der Wellenfront, weil ja dann $\beta \sim 1$ und daher nach (3.7) auch $\eta \sim 0$ ist. Ferner versagt die Näherung (3.25) für $f_1(z,t)$ für $\beta \sim \beta_0$ d.h. $\gamma \sim \gamma_0$ also bei der Ankunft der Hauptwelle.

Mit Hilfe von (3.21), (3.24) und (3.25) ergibt sich für die Funktion $f(z,t)$ die asymptotische Darstellung

$$f(z,t) = \frac{e^{ia}}{\sqrt{2\pi\eta}}\beta\left\{\frac{e^{i(\eta-\pi/4)}}{1+\dfrac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{e^{-i(\eta-\pi/4)}}{1-\dfrac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1-\beta^2}}\right\} + (\mathrm{Res}). \tag{3.26}$$

Daß dieser Ausdruck für $\beta = \beta_0$ unendlich und daher unbrauchbar wird entnimmt man aus (3.18). Bemerkenswert ist, daß eine einzige asymptotische Formel (3.26) die Wellenbewegung sowohl vor als auch nach der Ankunft der Hauptwelle beschreibt.

Aus den angegebenen Beziehungen ergibt sich zusammenfassend das nachstehende Bild von der Ausbreitung des durch die Funktion $f(z, t)$ dargestellten Wellenvorganges. Die Wellenfront breitet sich, wie (3.4) zeigt, mit der Frontgeschwindigkeit v, (2.5), aus. Ganz unmittelbar nach dem Eintreffen der Wellenfront wird die Wellenbewegung mit Rücksicht auf die erste Formel in (3.23) durch $e^{ia}J_0(\eta)$ beschrieben. Im Moment des Eintreffens der Wellenfront ($\eta = 0$) wird daher $f(z, t) = e^{ia}$. In der Wellenfront tritt also die gleiche Amplitude auf wie in der im wesentlichen durch das Residuum (3.20) dargestellten Hauptwelle. Diese Amplitude fällt jedoch rasch ab, um erst bei der mit der Gruppengeschwindigkeit ankommenden Hauptwelle auf einen Wert von der Größenordnung des Residuums anzusteigen. Aus (3.26) entnimmt man schließlich, daß für unendlich große positive t-Werte die Wellenfunktion $f(z, t)$ asymptotisch durch das Residuum (3.20) gegeben wird.

Es ist zu beachten, daß die in dem Ausdruck (2.7) für H_z auftretende Funktion $F(z, t)$ eine reelle Lösung der de Broglieschen Wellengleichung (2.4) ist. Falls also

$$f(z, t) = F(z, t) + i\,G(z, t) \tag{3.27}$$

gesetzt wird, wo $F(z, t)$ und $G(z, t)$ den Real- bzw. Imaginärteil von $f(z, t)$ bedeuten, so kann man für die Funktion $F(z, t)$ in (2.7) entweder den Real- oder den Imaginärteil von $f(z, t)$ wählen. Mit Rücksicht darauf, daß in dieser Funktion der willkürliche Phasenfaktor e^{ia} auftritt, bedeutet dies aber keinen wesentlichen Unterschied. Wir entscheiden uns daher für den Realteil von $f(z, t)$ und setzen also

$$F(z, t) = \mathbf{Re}\, f(z, t). \tag{3.28}$$

Die beiden Entwicklungen in (3.23) liefern uns dann für $F(z, t)$ die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned} F(z, t) &= \cos a J_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(a - n\frac{\pi}{2}\right) J_n(\eta)\gamma^{-n}(\gamma_0^n + \gamma_0^{-n}), \\ F(z, t) &= \cos(\omega_0 t - \varkappa_0 z - a) - \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(a - n\frac{\pi}{2}\right) J_n(\eta)\gamma_0^{-n}(\gamma^n - \gamma^{-n}). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Aus der ersten dieser beiden Entwicklungen ergibt sich, daß die Wellenfront (wo $\eta = 0$ ist) die Amplitude $\cos a$ besitzt. Da nun nach (3.3) und (3.27)

$$F(0, t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0, \\ \cos(\omega_0 t - a) \text{ für } t > 0, \end{cases}$$

so ist dies gleichzeitig die Amplitude mit der die eingestrahlte Welle zur Zeit $t = 0$ in der Ebene $z = 0$ einsetzt. In der Wellenfront der Longitudinalkomponente der magnetischen Feldstärke H_z pflanzt sich somit diese Anfangsamplitude ungemindert

fort. Die Amplitude von H_z fällt jedoch auf sehr kleine Werte ab, sobald η so groß wird, daß die asymptotische Darstellung (3.26) verwendbar wird.

Aus der zweiten Entwicklung (3.29) entnimmt man mit Hilfe der asymptotischen Darstellungen (3.25), daß nach der Ankunft der Hauptwelle für große t- und daher auch große η-Werte die Funktion $F(z, t)$ asymptotisch in die monochromatische Welle (2.10) übergeht.

§ 4. *Diskussion der übrigen Komponenten des elektromagnetischen Feldes.*

Wie der Ausdruck (2.8) für das elektromagnetische Feld zeigt, ist die H_z-Komponente des magnetischen Feldes der Funktion $F(z, t)$ proportional, während die beiden anderen in der Querschnittsebene liegenden magnetischen Feldkomponenten die Funktion $F_z(z, t)$ enthalten. Die elektrischen Feldkomponenten sind hingegen der Funktion $F_t(z, t)$ proportional. Um das gesamte elektromagnetische Feld zu diskutieren und auch das Verhältnis der Energieströme (2.19) angeben zu können, müssen wir daher auch die beiden Ableitungen (2.9) der Funktion $F(z, t)$ nämlich $F_t(z, t)$ und $F_z(z, t)$ zur Verfügung haben.

Es ist nicht empfehlenswert die Reihenentwicklungen für diese Ableitungen durch eine Differentiation der Reihen für die Funktion $F(z, t)$ zu berechnen, da man auf eine Anwendung von Rekursionsformeln für die Besselschen Funktionen und ihre Ableitungen angewiesen ist. Zweckmäßig verfährt man so, daß man die Differentiationen in dem Integral (3.12) durchführt und es dann in Reihen nach Besselschen Funktionen entwickelt. Mit Rücksicht auf (3.1) und (3.10) bis (3.13) erhält man dann für die Ableitungen der komplexen Funktion $f(z, t)$ die nachstehenden Ausdrücke

$$f_t(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -i\,\frac{e^{ia}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w}\,\frac{\omega_1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) A\,d\psi =$$

$$= -i\,\frac{e^{ia}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w}\left[\frac{\omega_1}{2}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) + \omega_0 A\right] d\psi,$$

$$f_z(z, t) = \frac{\partial f(z, t)}{\partial z} = i\,\frac{e^{ia}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w}\,\frac{\omega_1}{2v}\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) A\,d\psi = \tag{4.1}$$

$$= i\,\frac{e^{ia}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{w}\,\frac{1}{v}\left[\omega_0 + \frac{\omega_1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}\left(\frac{\gamma_0}{\xi - \gamma_0} - \frac{1}{\gamma_0}\,\frac{1}{\xi - \frac{1}{\gamma_0}}\right)\right] d\psi.$$

Bei Benutzung von (3.14), (3,15) und (3.21) ergibt sich sodann aus (4.1)

$$f_t(z, t) = -e^{ia}\frac{\omega_1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) J_1(\eta) - i\,\omega_0 f(z, t),$$

$$f_z(z, t) = \frac{i}{v}\left[e^{i\alpha}\omega_0 J_0(\eta) + e^{i\alpha}\frac{\omega_1}{2i}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)J_1(\eta) + \sqrt{\omega_0 - \omega_1^2}(f_1(z, t) - f_2(z, t))\right]. \tag{4.2}$$

Dabei ist zu beachten, daß nach dem Eintreffen der Hauptwelle nicht nur in $f(z, t)$ sondern auch in $f_1(z, t)$ das Residuum (3.20) hinzuzufügen ist.

Für die uns interessierenden in den elektromagnetischen Feldstärken (2.8) auftretenden Realteile der Funktionen $f_t(z, t)$ und $f_z(z, t)$ erhalten wir somit aus (4.2)

$$F_t(z, t) = -\cos\alpha \frac{\omega_1}{2}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) J_1(\eta) + \omega_0 G(z, t),$$

$$F_z(z, t) = \frac{1}{v}\left[-\sin\alpha\, \omega_0 J_0(\eta) + \cos\alpha \frac{\omega_1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right) J_1(\eta) - \right. \tag{4.3}$$

$$\left. - \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}\,(G_1(z, t) - G_2(z, t)\right],$$

wo in Übereinstimmung mit (3.27) und (3.28)

$$G(z, t) = \mathbf{Im} f(z, t), \quad G_1(z, t) = \mathbf{Im} f_1(z, t), \quad G_2(z, t) = \mathbf{Im} f_2(z, t)$$

bedeutet. Die Reihenentwicklungen für die Funktionen $G(z, t)$, $G_1(z, t)$ und $G_2(z, t)$ sind dabei leicht den Reihen (3.17), (3,22) und (3.23) zu entnehmen.

Gleich nach der Ankunft der Wellenfront, d. h. für kleine η- und große γ-Werte sind dann in den elektromagnetischen Feldstärken nach (3.17), (3.23), (3.29) und (4.3) die Näherungen zu verwenden:

$$F(z, t) = \cos\alpha\, J_0(\eta),$$

$$F_t(z, t) = \omega_0 \sin\alpha\, J_0(\eta) - \frac{\omega_1}{2}\cos\alpha\, \gamma\, J_1(\eta), \tag{4.4}$$

$$F_z(z, t) = -\frac{\omega_0}{v}\sin\alpha\, J_0(\eta) + \frac{\omega_1}{2v}\cos\alpha\, \gamma\, J_1(\eta).$$

Das bedeutet, daß im allgemeinen d.h. für beliebige Phasenwinkel α die Werte aller elektromagnetischen Feldstärken beim Eintreffen der Wellenfront sprunghaft ansteigen. Wie in einer demnächst erscheinenden Note gezeigt werden soll, ist jedoch der Eindeutigkeitsbeweis für das elektromagnetische Anfangswertproblem in dem hier behandelten Falle u.a. nur dann durchführbar, falls die Normalkomponenten der Feldstärken sich in einer solchen Unstetigkeitsfläche stetig verhalten*. Dies steht übrigens mit den Bedingungen im Einklang, die man mit Rücksicht auf die Maxwellschen Gleichungen an einer fortschreitenden Unstetigkeitsfläche für die Sprungwerte der elektromagnetischen Feldstärken stellen muß. Daraus folgt, daß in (4.4) $\alpha = \pm\pi/2$ und daher $\cos\alpha = 0$ und $\sin\alpha = \pm 1$ zu setzen ist.

Andernfalls würden auch, worauf mich Herr R. Gajewski anläßlich einer

*) Die weiteren Bedingungen werden von der in der vorliegenden Arbeit angegebenen Lösung von selbst erfüllt.

numerischen Auswertung freundlichst aufmerksam gemacht hat, die in $F_t(z, t)$ und $F_z(z, t)$ auftretenden Glieder mit $\gamma J_1(\ )$ ein Anwachsen der Amplituden der elektromagnetischen Transversalkomponenten in der Wellenfront bei ihrem Fortschreiten zur Folge haben, was physikalisch unverständlich wäre.

Im Falle $\alpha = \pi/2$ ändern sich hingegen die elektromagnetischen Feldstärken in der Wellenfront bei ihrem Fortschreiten nicht. Sie haben daher die Werte, die sie im Zeitmoment des Beginns des Einstrahlens an der Einstrahlstelle besessen haben. Wegen $\cos \alpha = 0$ ist ja in der Wellenfront $H_z = 0$ und da für $\eta = 0$ die Besselsche Funktion $J_0(\ )$ gleich 1 ist und die Glieder mit $\cos \alpha$ in (4.4) in den Funktionen $F_t(z, t)$ und $F_z(z, t)$ fortfallen, so unterliegen auch die elektromagnetischen Transversalkomponenten keiner Änderung.

Der Energiestrom (2.16) ist nur von den Transversalkomponenten der beiden Feldstärken abhängig. Für das Verhältnis

1) des Energiestromes gleich nach der Ankunft der Wellenfront und

2) des mittleren Energiestromes des Zustandes, der sich asymptotisch nach dem Eintreffen der Haupwelle einstellt ergibt daher (2.19) mit Rücksicht auf (2.12), 2.15) und (4.4) im Falle $\alpha = \pi/2$ den Ausdruck:

$$\frac{\int\limits_{Q} S_n df}{\int\limits_{Q} S_n^* df} = \frac{2}{v} \frac{\omega_0}{\varkappa_0} J_0^2(\eta) = 2 \frac{v_{ph}}{v} J_0^2(\eta) = 2 \frac{v}{v_g} J_0^2(\eta).$$

An ihm ist zunächst bemerkenswert, daß er ebenso wie der Ausdruck (2.18) für den Energiestrom der monochromatischen Welle (2.10) positiv ist. Das bedeutet, daß — wie man von vornherein erwartet — bei der Ankunft der Wellenfront und gleich darauf die elektromagnetische Energie in der Richtung der Bewegung der Wellenfront strömt. Sodann ist der Faktor $v/v_g = v_{ph}/v$(vgl. (2.15)) zu beachten, der mit abnehmender Gruppen- oder wachsender Phasengeschwindigkeit der asymptotisch sich einstellenden monochromatischen Welle wächst.

Sobald die Wellenfront über einen Raumpunkt hinweggegangen ist, wird mit wachsender Zeit η, (3.7), groß und es sind dann für die Funktion $F(z, t)$ und ihre Ableitungen (2.9) asymptotische Näherungen zu gebrauchen Die Näherung für $F(z, t)$ wird durch den Realteil des Ausdruckes (3.26) gegeben. Die Näherungen für $F_t(z, t)$ und $F_z(z,t)$ werden erhalten, wenn man in (4.3) für $J_0(\eta)$ und $J_1(\eta)$ die asymptotische Näherung (3.24) und für $G_1(z, t)$ und $G_2(z, t)$ die imaginären Teile der Näherungen (3.25) einsetzt.

In dem weiteren Verlauf der Vorläufer nehmen somit, bis knapp vor dem Eintreffen der Hauptwelle, die elektromagnetischen Feldstärken sehr kleine Werte an und es ist auch daher hier der Energiestrom sehr klein. Leider läßt sich ein geschlossener Ausdruck für den gesamten in den Vorläufern enthaltenen Energiebetrag nicht angeben, so daß er nur in Spezialfällen auf Grund der in dieser Arbeit angegebenen Formeln numerisch zu ermitteln ist. Da die Wellenfront mit einer größeren Geschwindigkeit (v) als die Hauptwelle (v_g) fortschreitet, so werden jedoch die Vor-

läufer um so länger, je länger der Weg wird, den die Wellenfront im Wellenleiter zurücklegt. Es scheint daher plausibel zu sein, daß der in den Vorläufern enthaltene Energiebetrag mit der Länge des von der Wellenfront zurückgelegten Weges wächst.

Nach dem Eintreffen der Hauptwelle nimmt ziemlich rasch der Energiestrom in erster Näherung den für die monochromatische Welle (2.10) geltenden Wert (2.18) an. In dem nicht streng monochromatischen Teil der Energieströmung treten in der Hauptwelle nun aber auch Glieder auf, die durch Produkte aus dem streng monochromatischen Bestandteil und dem im allgemeinen ihm gegenüber kleinen nicht monochromatischen Bestandteil gegeben werden. Es steht daher zu erwarten, daß sie größer sind als die in den Vorläufern auftretenden Glieder, die in den im allgemeinen kleinen Gliedern quadratisch sind.

Zu den obigen Überlegungen muß aber bemerkt werden, daß die Frage, welcher Teil der in den Wellenleiter eingestrahlten Energie für die Signalübermittlung nutzbar verwendet werden kann, exakt nur auf Grund einer Analyse der Vorgänge in der gegebenen Empfangsanlage beantwortet werden kann.

§ 5. *Vervollständigung und Kritik der erhaltenen Resultate.*

Die durchgeführten Überlegungen können noch in verschiedener Weise vervollständigt und verbessert werden. Wir haben vorausgesetzt, daß das Einstrahlen des elektromagnetischen Impulses in den Wellenleiter zur Zeit $t = 0$ beginnt und unendlich lange dauert, während in der Radartechnik Wellenimpulse von endlicher zeitlicher Dauer verwendet werden. Um einen Wellenimpuls zu erhalten dessen Einstrahlen zur Zeit $t = t_0$ beginnt und zur Zeit $t = t_1$ endet, hat man den Ausdruck (3.1) für $f(z, t)$ durch

$$f(z, t) = \frac{e^{i\alpha}}{2\pi i} \int\limits_{(U)} \left(e^{w_0} - e^{-i\omega_0(t_1 - t_0)}\, e^{w_1}\right) \frac{d\omega}{\omega - \omega_0},$$

wo

$$\begin{aligned} w_0 &= -i(\omega(t - t_0) - \varkappa z), \\ w_1 &= -i(\omega(t - t_1) - \varkappa z) \end{aligned} \tag{5.1}$$

zu ersetzen.

In der gleichen Weise wie die Formel (3.3) bewiesen wurde, kann nun auch gezeigt werden, daß die jetzt angegebenene Funktion $f(z, t)$ die Randbedingung

$$f(0, t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < t_0, \\ e^{+i\alpha}\, e^{-i\omega_0(t - t_0)} \text{ für } t_0 < t < t_1, \\ 0 \text{ für } t_1 < t \end{cases}$$

erfüllt. Die Entwicklungen der Funktion (5.1) in Reihen nach Besselschen Funktionen können sofort aus den für die Funktion (3.1) angegebenen erhalten werden.

Es wäre auch wünschenswert Näherungsformeln zu besitzen, die die Feldstärken bei der Ankunft der Hauptwelle beschreiben.

Unsere auf der Funktion $f(z, t)$, (3.1), basierenden Überlegungen sind vor allem deshalb unbefriedigend, weil sie voraussetzen, daß das Einstrahlen zur Zeit $t = 0$ mit einer endlichen Amplitude der elm. Transversalkomponenten beginnt. Dies stellt eine ganz unzulässige Idealisierung der tatsächlich in der Radartechnik auftretenden Vorgänge dar. In Wirklichkeit wird nämlich mit Rücksicht auf den Anschwingungsvorgang in der Senderöhre die Amplitude der eingestrahlten Welle von Null an bis auf einen Maximalwert anwachsen. Eine Lösung des behandelten Problems, die speziell einem exponentiellen Ansteigen der Amplitude der eingestrahlten elektromagnetischen Welle entspricht und die wohl den wirklichen Sendevorgang hinreichend genau beschreibt, kann aber durch

$$f(z, t) = \frac{e^{ia}}{2\pi i} \int\limits_{(U)} e^{w} \left(\frac{1}{\omega - \omega_0} - \frac{1}{\omega - (\omega_0 - i\varrho_0)} \right) d\omega, \tag{5.2}$$

$$w = -i(\omega t - \varkappa z)$$

dargestellt werden. Für $z = 0$ erhält man ja aus (5.2) auf dem zu (3.3) führenden Wege

$$f(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0. \\ e^{ia}\, e^{-i\omega_0 t}\,(1 - e^{-\varrho_0 t}) & \text{für } 0 < t. \end{cases}$$

Man hat ja nun nicht nur das in $\omega = \omega_0$ sondern auch das in $\omega = \omega_0 - i\varrho_0$ liegende Residuum zu berücksichtigen. Die positive Konstante ϱ_0 charakterisiert dabei die Schnelligkeit des Anschwingens der Senderöhre.

Es ist offenbar nicht schwer durch eine Kombination der bei der Herstellung der Funktionen (5.1) und (5.2) angewandten Verfahren auch eine Funktion $f(z, t)$ anzugeben, die einen Wellenvorgang in einem Wellenleiter beschreibt, bei dem das Einstrahlen zur Zeit $t = t_1$ exponentiell beginnt und zur Zeit $t = t_2$ exponentiell oder momentan aufhört.

Der Behandlung durch die in der vorliegenden Arbeit angewandte Methode ist auch der Fall $\omega_0 < \omega_1$ zugänglich, wo die Wellenlänge der einfallenden Strahlung größer ist als die Grenzwellenlänge. Die Amplitude der einfallenden Welle nimmt dann im monochromatischen Falle wie bei der Totalreflexion exponentiell beim Fortschreiten in der Längsrichtung des Wellenleiters ab. Ihre Entstehung kann man mit Hilfe des Ansatzes (3.1) verfolgen. Es steht zu vermuten, daß zur Erzeugung dieser Wellen mehr Energie benötigt wird als in dem stationären Zustande in ihnen enthalten ist, da ein Teil der Energie mit der Wellenfront ins Unendliche abwandert. Bemerkenswert ist, daß in dem jetzt betrachteten Falle keine Hauptwelle auftritt. Der Pol ω_0 ist nun nämlich in der -Ebene auf der reellen Achse zwischen den beiden Verzweigunspunkten $\pm\, \omega_1$ gelegen und es kann daher der elliptische Integrationsweg nicht über ihn hinwegstreichen.

Diese Wellen sind deshalb so interessant, weil sie entstehen müssen, damit für die ihnen entsprechende Frequenz die Sperrwirkung des Wellenleiters zustande kommt. Der gesamte in diesen Wellen enthaltene Energiebetrag geht ähnlich wie der in dieser Arbeit besprochene größtenteils für die Signalübermittlung verloren.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß auch das akustische Analogon des hier behandelten Problems vom praktischen Interesse ist. Es stellt nämlich die Fortpflanzung eines plötzlich einsetzenden Pfeifsignals z. B. einer Lokomotive in einem Tunnel, etwa in der Untergrundbahn, dar.

Ciechocinek, im August 1953

Nachschrift bei der Korrektur. Nach Abschluß der vorliegenden Untersuchung erhielt ich Kenntnis von der im Septembercheft des *Quart. Journ. of Mech. and Applied Math.* (6, 313, 1953) erschienenen Arbeit von J. D. Pearson, die sich mit dem akustischen Analogon des hier behandelten Problems beschäftigt. Die Arbeit enthält auch eine die Ankunft der Hauptwelle beschreibende Näherungsformel für die von mir bereits im Jahre 1950 angegebene Funktion $F(z, t)$.

Essei noch bemerkt, daß die Reihenentwicklungen der durch (5.2) gegebenen Funktion $f(z, t)$ leicht aus den Reihenentwicklungen (3.23) der durch (3.1) definierten Funktion $f(z, t)$ zu erhalten sind. Sie werden nämlich durch die Differenz der Reihen (3.23) und der ihnen entsprechenden Reihen gegeben, in den ω_0 durch $\omega_0 - i\gamma_0$ ersetzt wurde.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В. Рубинович, *О распространении непостоянных электромагнитных сигналов в волноводах.*

Работа даёт точное решение проблемы распространения непостоянных электромагнитных сигналов в волноводах, возникающих благодаря введению в волноводы монохроматических электромагнитных волн начиная от определённого момента времени. Если длина монохроматической волны меньше предельной длины волны соответствующего волнового типа, тогда возникает поступающая волна, состоящая из двух частей: из первоначальной волны и из главной волны.

Началом первоначальной волны является фронт волны, поступающий со скоростью свободных электромагнитных волн в среде наполняющей волновод. Напряжение электромагнитного поля фронта волны равно напряжению волны введённой в пункте и моменте введения.

Непосредственно после перехода фронта волны напряжение электромагнитного поля быстро падает вплоть до момента прихода главной волны, расходящейся с групповой скоростью. Тогда напряжения поля снова увеличиваются, так как очень скоро достигается асимптотическое состояние, отвечающее поступающей монохроматической волне. Для вычисления электромагнитного поля в волнах первоначальной и главной даны развития на функции Бесселя и асимптотичные формулы. Оказывается, что для данного типа волны отношение потока

энергии, проходящей в известном моменте времени через известное сечение к среднему потоку энергии в асимптотически устанавливающемся монохроматическом случае совсем не зависит от формы сечения.

Развития, приведённые в работе, делают возможным вычисление энергетических потерь (важных для технических применений), возникающих при передаче сигналов через волноводы вследствие того, что волновое движение не точно монохроматическое.

Работа даёт также (без дискусии) точное решение проблемы, обсуждаемой в случае экспоненциального возрастания электромагнитных колебаний в передатчике.

LITERATURHINWEISE

Moshinsky M., *Phys. Rev.*, **88**, 625 (1952).

Poincelot P., *C. R. Acad. Sci. (Paris)*, **234**, 599 (1952); ebenda **234**, 2426 (1952); ebenda **236**, 184 (1953).

Rubinowicz A., *Acta Phys. Polon.* **10**, 79 (1950).

DIFFERENTIAL STRUCTURE OF NON-LOCAL THEORIES, I

By Jan Rzewuski

Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, Wrocław

(received December 16, 1953)

It is shown on an example of a one-dimensional linear integro-differential equation how to obtain a differential description of non-local systems. In Section 2 the equivalence of integro-differential and pure differential equations of the same order is proved under certain conditions about the kernel. In Sections 3 and 5 the discussion of the coefficients of the differential equation is carried out. Section 4 is devoted tc the canonical quantization of the system. Finally, in Section 6, another direct approach to the considered problem is given.

1. *Introduction*

In the mathematical description of elementary particles non-local theories play an important role. The structure of these theories, however, is not yet fully clarified. This concerns particularly the question to what extent canonical formulation and quantization are possible.

The first to rise this question was Pauli (1953). He considers a particular type of non-local field theory and by use of the method of successive approximations constructs canonical field quantities in the first order approximation in the coupling constant.

We shall approach this problem from a different point of view which allows to develop the canonical formalism in a closed form, at least for the case of linear non-local theories. The basic idea of this approach is the equivalence of the integro-differential equations corresponding to non-local theories with pure differential equations of the same order.

In the present paper the most simple example is treated in some detail, namely the integro-differential equation

$$\ddot{q}(t) + \varkappa^2 q(t) = \lambda \int_a^b K(t,t')dt'q(t') \tag{1.1}$$

Here $q(t)$ is the unknown function, t the independent variable, $\varkappa^2$ and λ are positive constants, dotts denote differentiations with respect to time. $K(t,t')$ is the kernel of the equation; it describes interaction with external systems. Assuming

$$K(t\,t') = \Phi\,(t)\,G\,(t - t'), \tag{1.2}$$

one has a complete analogy of the one-dimensional equation (1,1) with the four-dimensional partial integro-differential equation describing non-local interaction of a charged scalar field $q(x, y\ z, t)$ with an external potential $\Phi(x, y, z, t)$. (1,1) may be also considered as an equation for the non-local oscillator.

The ideas developed here for the sake of simplicity for the particular case of equation (1.1) apply also to the general case of an arbitrary ordinary integro-differential equation. For general linear problems the procedure of the present paper may be directly applied. Generalization of the procedure to partial integro-differential equations (non-local field theory) and to non-linear problems (interacting systems) shall be given in a forthcoming paper.

2. Equivalence between integro-differential and differential equations

To relate an integro-differential equation of type (1,1) with a pure differential equation, it is necessary to know the manifold of solutions of the original equation. It may be shown that, with certain assumptions about λ and $K(t, t')$, the manifold of solutions of (1.1) contains two arbitrary parameters. For this purpose let us introduce the function

$$\Delta^r\,(t) = \eta^r(t)\,\frac{1}{\varkappa}\,\sin\varkappa\,t, \qquad \eta^r(t) = \begin{cases} 1, & t > 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Multiplying (1.1) by $\Delta^r(\tau - t)$ and integrating with respect to t over the interval (a,b) one obtains the integral equation

$$q(\tau) = q^0(\tau) + \lambda \int_a^b N(\tau,t)dtq(t), \tag{2,2}$$

where

$$q^0(t) = \frac{1}{\varkappa}\,\dot{q}(a)\,\sin\varkappa(t - a) + q(a)\cos\varkappa(t - a), \tag{2.3}$$

$$N(\tau, t) = \int_a^b \Delta^r\,(\tau - t')dt'\,K(t', t). \tag{2.4}$$

Obviously, each solution of (1.1) is a solution of (2.2) and vice versa.

Let us assume that $K(\tau, t)$ is bounded in the domain $a \leqslant \tau \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$. Then $N(\tau, t)$ is also bounded. If λ is not an eigenvalue of the kernel $N(\tau, t)$, the integral equation (2.2) possesses, according to well known theorems, one unique solution corresponding to each particular $q^0(\tau)$. Since the functions $q^0(\tau)$ form a two-parametric manifold with the arbitrary initial values $\dot{q}\,(a)$ and $q\,(a)$ as parameters, the solutions of (2.2) and, therefore, also of (1.1) form a two-parametric manifold. According to another well-known theorem, this manifold satisfies a second order differential equation which may be obtained by elimination of the parameters.

As stated in the introduction, the above theorems have general validity not restricted to the special type of equation considered in this paper (cf. Krzywicki, Rzewuski, Zamorski, and Zięba 1954).

For the linear case (1.1) it is easy to write down the explicit form of the differential equation equivalent to (1.1). For this purpose the solution of the integral equation (2.2) has to be written down by means of the resolving kernel

$$q(\tau) = q^0(\tau) + \lambda \int_a^b R(\tau, t) dt\, q^0(t) \tag{2.5}$$

where

$$R(\tau, t) = N(\tau, t) + \lambda \int_a^b N(\tau, t') dt'\, R(t', t). \tag{2.6}$$

Introducing (2.3) into (2,5), one gets

$$\dot{q}(a)\, r_1(t) + q(a)\, r_2(t) - q(t) = 0 \tag{2.7}$$

where

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa(t-a) + \lambda \int_a^b R(t, t')\, dt' \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t'-a) \\ r_2(t) &= \cos \varkappa (t-a) + \lambda \int_a^b R(t, t') dt' \cos \varkappa (t'-a). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Elimination of the arbitrary parameters $\dot{q}(a)$ and $q(a)$ from (2.7) and from its first and second derivative yields

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 & q \\ \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{q} \\ \ddot{r}_1 & \ddot{r}_2 & \ddot{q} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.9}$$

This is a second order linear differential equation of the form

$$a_2 \ddot{q} + a_1 \dot{q} + a_0 q = 0 \tag{2.10}$$

with variable coefficients

$$a_0 = \begin{vmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \\ \ddot{r}_1 & \ddot{r}_2 \end{vmatrix}, \quad a_1 = -\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ \ddot{r}_1 & \ddot{r}_2 \end{vmatrix}, \quad a_2 = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ \dot{r}_1 & \dot{r}_2 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

We notice the relation

$$a_1 = -\dot{a}_2. \tag{2.12}$$

Equation (2.10) is equivalent to (1,1) in the sense that (with the above assumptions about λ and $K(\tau, t)$) each solution of (1.1) satisfies (2.10) and vice versa.

The quantization of this equation may be carried out by conventional methods. We shall come back to this question in Section 4.

As stated in the introduction, the above construction of a differential equation which is equivalent to a given integro-differential equation may be carried over without essential difficulties to the general case of linear integro-differential equations of arbitrary order with variable coefficients containing derivatives also under the integral sign (cf. Krzywicki, Rzewuski, Zamorski, and Zięba 1954). In the important case of systems of non-linear integro-differential equations an approximate method must be used. We shall come back to this question in a forthcoming paper.

3. Discussion of the coefficients

For the consideration to follow it is important to carry out a detailed discussion of the coefficients in equation (2,10). Their explicit form is

$$a_0 = -\varkappa^2(1 + c_0), \quad a_2 = -(1 + c_2) \tag{3.1}$$

with

$$\begin{aligned} C_0 &= -\lambda \int_a^b \dot{R}(t, t') \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t - t')dt' - \lambda \int_a^b \ddot{R}(t, t') \frac{1}{\varkappa^2} \cos \varkappa (t - t')dt' \\ &+ \lambda^2 \iint_a^b \ddot{R}(t, t') \frac{1}{\varkappa^3} \sin \varkappa (t' - t'')\dot{R}(t, t'')dt'dt'' \\ C_2 &= -\lambda \int_a^b \dot{R}(t, t') \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t - t')dt' + \lambda \int_a^b R(t, t') \cos \varkappa (t - t')dt' \\ &- \lambda^2 \iint_a^b R(t, t') \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t' - t'') \dot{R}(t, t'')dt'dt'' \end{aligned} \tag{3.2}$$

(Dotts denote always differentiation with respect to the first argument).
With help of the notation (3.1), equation (2.10) may be written

$$(1 + c_2)\, \ddot{q} - \dot{c}_2\dot{q} + \varkappa^2 (1 + c_0)q = 0. \tag{3.3}$$

From (3.2) it is easily seen that for sufficiently small λ, $1 + c_2 > 0$ in the interval (a, b) and we may write (3.3) in the form

$$\ddot{q} + \varkappa^2 q = \frac{\dot{c}_2 \dot{q} + \varkappa^2(c_2 - c_0)q}{1 + c_2} \tag{3.4}$$

Another form, not restricted by the condition of smallness for λ, is

$$\ddot{q} + \varkappa^2 q = -c_2 \ddot{q} + \dot{c}_2 \dot{q} - \varkappa^2 c_0 q. \tag{3.5}$$

In both (3.4) and (3.5) the right hand sides are proportional to λ and vanish as $\lambda \to 0$, which corresponds to the case of no external forces.

The transition to a local theory is desribed by

$$G(t) \to \delta(t) \tag{3.6}$$

($\delta(t)$ — Dirac's symbol). In this case, on account of (1.2), the right hand side of the original equation (1.1) goes over into $\lambda \Phi q$. The same must hold for the right-hand side of (3.4) and (3.5). To verify that this is indeed the case, let us calculate the coefficients $\dot{c}_2$ and $\varkappa^2 (c_2 - c_0)$. From (3.2) one finds

$$\begin{aligned} \varkappa^2 (c_2 - c_0) &= \lambda \int_a^b M(t, t') \cos \varkappa (t - t')\, dt' \\ &- \lambda^2 \iint_a^b M(t, t') \sin \varkappa (t' - t'') \frac{1}{\varkappa} \dot{R}(t, t'')\, dt' dt'' \\ \dot{c}_2 &= -\lambda \int_a^b M(t, t') \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t - t')\, dt' \\ &+ \lambda^2 \iint_a^b M(t, t') \sin \varkappa (t' - t'') \frac{1}{\varkappa} R(t, t'')\, dt' dt'' \end{aligned} \tag{3.7}$$

where

$$M(t, t') \equiv \ddot{R}(t, t') + \varkappa^2 R(t, t') = K(t, t') + \lambda \int_a^b K(t, t'')\, dt''\, R(t'', t'), \tag{3.8}$$

the last equation stemming from the properties of the function $\Delta^r(t)$. In the limiting case (3.6)

$$M(t, t') \to \Phi(t) [\delta(t, - t') + \lambda R(t, t')] \tag{3.9}$$

and (after some calculations)

$$\begin{aligned} \varkappa^2 (c_2 - c_0) &\to \lambda \Phi(t) (1 + c_2) \\ \dot{c}_2 &\to 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Finally from the last equation (3.10) the bahaviour of c_2 may be deduced. In fact, we may write

$$c_2(t) = \int_a^t \dot{c}_2(t)\, dt, \tag{3.11}$$

since $c_2(a) = 0$, as follows from the properties of the function $\Delta^r(t)$ (cf.(2.1), (2.4), (2.6), and 3.2)). In the limiting case (3.6) $\dot{c}_2 \to 0$ and, therefore,)

$$c_2(t) \to 0 \tag{3.12}$$

4. Canonical quantization

For the purpose of canonical quantization it is sufficient to reduce equation (3.3) to an equation of the Sturm-Liouville type. If λ is sufficiently small $(1 + c_2 > 0)$ this may be achieved by division of (3,3) by $(1 + c_2)^2$. One obtains in this way

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{q}}{1 + c_2}\right) + \frac{\varkappa^2 (1 + c_0)}{(1 + c_2)^2} q = 0 \tag{4.1}$$

The corresponding Lagrangian and Hamiltonian are

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1 + c^2} \dot{q}^2 - \frac{\varkappa^2 (1 + c_0)}{(1 + c_2)^2} q^2\right\}, \tag{4.2}$$

$$H = \frac{1}{2}\left\{(1 + c_2) p^2 + \varkappa^2 \frac{1 + c_0}{(1 + c_2)^2} q^2\right\}, \tag{4.2}$$

where

$$p = \frac{\dot{q}}{1 + c_2} \tag{4.3}$$

is the canonical momentum conjugate to q.

The quantization may be performed in the usual way. The commutation rules or the can onical coordinates and momenta taken at equal times are

$$[q(t), q(t)] = [p(t), p(t)] = 0, \quad [q(t), p(t)] = i\hbar. \tag{4.4}$$

For different times one may obtain simple commutation rules by going over from the Heisenberg picture, in which we are working, to a picture in which the equations of motion may be solved explicitly. In this new picture a perturbation procedure may be developed. It must, of course, give the same results as the perturbation method applied directly to the original equation (1.1). We shall verify this statement in the next section.

Heisenberg's and Schroedinger's equations may be written down

$$\dot{F} = \frac{1}{i\hbar}[F, H] + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.5}$$

$$H\psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} \tag{4.6}$$

with H given by (4.2), F being an arbitrary operator which may explicitly depend on the time variable, and $\psi(q, t)$ being the state vector of the system. These equations determine completely the behaviour of the system at each instant of time.

Thus a differential desription of the motion (both quantum-theoretical and classical) is possible for the non-local system described by the integro-differential equation (1.1).

5. Perturbation method

One may apply the quantum-theoretical perturbation method directly to the original equation (1.1) (integral quantization) as well as to the equivalent equations (3.4) and (3.5). The results will be identical. This follows immediately from the fact that each solution of (1.1) satisfies also (3.4) and (3.5) and, therefore,

$$\frac{\dot{c}_2 \dot{q} + \varkappa^2 (c_2 - c_0) q}{1 + c_2} = - c_2 \ddot{q} + \dot{c}_2 \dot{q} - \varkappa^2 c_0 q = \lambda \int_a^b K(t, t') \, q(t') dt'. \quad (5.1)$$

Equations (5.1) are operator identities in the space of the solutions of (1.1). They relate the values of $q(t')$ distributed by means of the kernel $K(t, t')$ over the whole interval (a, b) to the values of $q(t)$ and $\dot{q}(t)$ (and possibly also $\ddot{q}(t)$) at an arbitrary point in (a, b). The knowledge of a differential operator which is equivalent to a given integral operator in the space of the solutions of a given integro-differential equation enables us to convert all non-local quantities corresponding to the problem in question into local quantities depending only on one time moment, lying between a and b.

It is instructive to verify the identity (5.1) in the first two approximations in the constant λ. The mechanism of the transition from non-local to local quantities becomes then more apparent.

Expansion of the coefficients of the left-hand side of (5.2) yields up to the second order in λ

$$\frac{\varkappa^2 (c_2 - c_0)}{1 + c_2} = \lambda \int_a^b K(t, t') \, dt' \cos \varkappa (t' - t) + \lambda^2 \iiint_a^b K(t, t') \, dt' \left[\eta^r (t' - t''') - \eta^r (t - t''')\right] \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t' - t''') \, dt''' \, K(t''', t'') \, dt'' \cos \varkappa (t'' - t) + \ldots \quad (5.2)$$

$$\frac{\dot{c}_2}{1 + c_2} = \lambda \int_a^b K(t, t') \, dt' \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t' - t) + \lambda^2 \iiint_a^b K(t, t') \, dt' \left[\eta^r (t', - t''') - \eta^r (t - t''')\right] \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t' - t''') \, dt''' \, K(t''', t'') \, dt'' \frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t'' - t) + \ldots$$

The expansion of $q(t)$ in terms of $q^0(t)$ is given by (2.5) and (2.6)

$$q(t) = q^0(t) + \lambda \int_a^b N(t, t') \, dt' \, q^0(t') + \ldots \quad (5.3)$$

To obtain the left-hand side of (5.1) in the first approximation in λ, one needs only to consider the first terms in the expansions (5.2) and (5.3)

$$\frac{\dot{c}_2\dot{q} + \varkappa^2 (c_2 - c_0) q}{1 + c_2} = \lambda \int_a^b K(t, t')\, dt' \left[\frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa (t' - t)\, \dot{q}^0 (t) + \cos \varkappa (t' - t) q^0(t)\right] + \ldots$$

$$= \lambda \int_a^b K(t, t')\, dt'\, q^0 (t') + \ldots \tag{5.4}$$

It is seen that the basic solutions $\cos \varkappa (t' - t)$ and $\frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa(t' - t)$ of the problem in lowest approximation ($\lambda = 0$) play the role of operators which introduce $q(t')$ under the integral sign.

Similarly, in the next approximation one obtains (after some calculations) due to the properties of the basic solutions

$$\frac{\dot{c}_2\dot{q} + \varkappa^2(c_2 - c_0) q}{1 + c_2} = \lambda \int_a^b K(t, t')\, dt' \{q_0 (t') + \lambda \int_a^b N(t, t'')\, dt''\, q^0 (t'') + \ldots\} \tag{5.5}$$

in agreement with (5.1).

6. A direct method

The considerations of the preceding section open an interesting possibility to solve the problem of converting integro-differential equations into pure differential equations in a direct way. Whenever integral operators occur in an equation, we shall try to find differential operators which are equivalent in the space of solutions of the given equation. If the problem is soluble, we obtain the desired differential equation simply by replacing the integral operators by equivalent differential operators. For the case of the linear integro-differential equation (1.1), the problem reduces to the solution of an infinite set of linear equations with an infinite number of unknowns.

Anticipating the results, we may look for a differential operator equivalent to the right-hand side of (1.1) in the form $A\dot{q} + Bq$, and try to determine A and B in such a way that the identity

$$A\dot{q} + Bq = \int_a^b K(t, t')\, dt'\, q(t') \tag{6.1}$$

is satisfied in the space of solutions of (1.1). In course of derivation it will become obvious that there is no necessity to introduce higher derivatives on the left-hand side of (6.1) if the original equation contains second order derivatives outside the

integral and no derivatives under the integral sign. Expanding A and B in powers of λ

$$A = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n A^{(n)} , \qquad B = \sum_{n=o}^{\infty} \lambda^n B^{(n)} , \tag{6.2}$$

using relations (2.5) and (2.6), and equating coefficients in (6.1), one gets an infinite set of equations

$$\sum_{m=o}^{n} \left(A^{(m)} \frac{d}{dt} + B^{(m)}\right) \int_a^b \cdots \int_a^b N(t, t^1)\, dt^1\, N(t^1, t^2)\, dt^2 \ldots N(t^{n-m-1}, t^{n-m})\, q^0(t^{n-m})$$
$$= \int_a^b \cdots \int_a^b K(t, \tau)\, d\tau\, N(\tau, t^1)\, dt^1 \ldots N(t^{n-1}, t^n)\, q^0(t^n), \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.3}$$

Here $q^0(t')$ may be expressed by its initial values and the initial values of its first derivative at an arbitrary time $t = t^0$ (cf. (2.3)). For convenience we introduce the notation

$$\frac{1}{\varkappa} \sin \varkappa t = \Delta(t), \quad \cos \varkappa t = \dot{\Delta}(t). \tag{6.4}$$

With this notation (2.3) becomes

$$q^0(t') = \Delta(t' - t^0)\, \dot{q}^0(t^0) + \dot{\Delta}(t' - t^0)\, q^0(t^0). \tag{6.5}$$

Putting further

$$\int_a^b \cdots \int_a^b D_1(t, t^1)\, dt^1\, D_2(t^1, t^2)\, dt^2 \ldots D_n(t^{n-1}, t^0) = \{D_1 \cdot D_2 \cdots D_n\}(t, t^0), \tag{6.6}$$

we may write equations (6.3) in the simple form

$$\sum_{m=o}^{n} \left(A^{(m)} \frac{d}{dt} + B^{(m)}\right) [\{N^{n-m} \Delta\}(t, t^0)\, \dot{q}^0(t^0) + \{N^{n-m} \dot{\Delta}\}(t, t^0)\, q^0(t^0)]$$
$$= \{KN^n \Delta\}(t, t^0)\, \dot{q}^0(t^0) + \{KN^n \dot{\Delta}\}(t, t^0)\, q^0(t^0), \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.7}$$

(6.7) are identities in the space of solutions of (1.1), hence they must be satisfied for an arbitrary choice of the parameters $\dot{q}^0(t^0)$ and $q^0(t^0)$. The infinite set (6.7) splits therefore into two infinite sets of equations

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=o}^{n} \left(A^{(m)} \frac{d}{dt} + B^{(m)}\right) \{N^{n-m} \Delta\}(t, t^0) &= \{KN^n \Delta\}(t, t^0) \\ \sum_{m=o}^{n} \left(A^{(m)} \frac{d}{dt} + B^{(m)}\right) \{N^{n-m} \dot{\Delta}\}(t, t^0) &= \{KN^n \dot{\Delta}\}(t, t^0) \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Their explicit form is

$$
\begin{aligned}
&A^{(o)}\dot{\triangle} + B^{(o)}\triangle = \{K\triangle\}\\
&A^{(o)}\ddot{\triangle} + B^{(o)}\dot{\triangle} = \{K\dot{\triangle}\}\\
&A^{(o)}\{\dot{N}\triangle\} + B^{(o)}\{N\triangle\} + A^{(1)}\dot{\triangle} + B^{(1)}\triangle = \{KN\triangle\}\\
&A^{(o)}\{\dot{N}\dot{\triangle}\} + B^{(o)}\{N\dot{\triangle}\} + A^{(1)}\ddot{\triangle} + B^{(1)}\dot{\triangle} = \{KN\dot{\triangle}\}\\
&A^{(o)}\{\dot{N}N\triangle\} + B^{(o)}\{N^2\triangle\} + A^{(1)}\{\dot{N}\triangle\} + B^{(1)}\{N\triangle\} + A^{(2)}\dot{\triangle} + B^{(2)}\triangle = \{KN^2\triangle\}\\
&A^{(o)}\{\dot{N}N\dot{\triangle}\} + B^{(o)}\{N^2\dot{\triangle}\} + A^{(1)}\{\dot{N}\dot{\triangle}\} + B^{(1)}\{N\dot{\triangle}\} + A^{(2)}\ddot{\triangle} + B^{(2)}\dot{\triangle} = \{KN^2\dot{\triangle}\}\\
&\cdots\\
&A^{(o)}\{\dot{N}N^{n-1}\triangle\} + B^{(o)}\{N^n\triangle\} + A^{(1)}\{\dot{N}N^{n-2}\triangle\} + B^{(1)}\{N^{n-1}\dot{\triangle}\} + \ldots A^{(n)}\dot{\triangle} + B^{(n)}\triangle\\
&\qquad = \{KN^n\triangle\}\\
&A^{(o)}\{\dot{N}N^{n-1}\dot{\triangle}\} + B^{(o)}\{N^n\dot{\triangle}\} + A^{(1)}\{\dot{N}N^{n-2}\dot{\triangle}\} + B^{(1)}\{N^{n-1}\dot{\triangle}\} + \ldots A^{(n)}\ddot{\triangle} + B^{(n)}\dot{\triangle}\\
&\qquad = \{KN^n\dot{\triangle}\}
\end{aligned}
$$

From (6.8) or (6.9) $A^{(n)}$ and $B^{(n)}$ may be calculated. The calculation is facilitated by the fact that the characteristic determinant equals unity on account of (6.4). The results are just (5.2) in the first two approximations. Calculation of the n-th approximation and introduction into (6.2) yield for A and B the closed expressions (3.7) divided by $1 + c_2$.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Я. Жевуский, *Дифференциальная струкрура нелокализируемых теорий I.*

Показано на примере линейного интегрально-дифференциального уравнения в одном измерении, как получить дифференциальное описание нелокализируемых систем. В § 2 доказана эквивалентность интегрально-дифференциальных и дифференциальных уравнений того же порядка при определенных условиях относящихся к кернелю. В §§ 3 и 5 проведена дискуссия коэффициентов дифференциального уравнения. § 4 посвящен канонической квантизации системы. В § 6 показан другой непосредственный подход к рассматриваемой проблеме.

REFERENCES

Krzywicki A., Rzewuski J., Zamorski J. and Zięba A. (in preparation, 1954).
Pauli W., *Nuovo Cimento*, **10**, 648-667 (1953).

LABORATORY EQUIPMENT AND TECHNIQUES

L'ALLONGEMENT DU PALIER DES COMPTEURS GM A CATHODE EN VERRE

PAR S. MICHALAK, B. MOWCZAN ET A. ZAWADZKI

Laboratoire de Physique de l'Université de Łódź

(Manuscrit reçu le 9 novembre 1953)

Le compteur du type Maze possède un palier sensiblement plus long qu'un compteur à cathode métallique. On a étudié les deux facteurs qui causent cette propriété du compteur Maze: la grande résistance du verre insérée dans le circuit cathodique et la présence d'une surface de verre au lieu d'une surface métallique à l'intérieur du compteur. En premier lieu on doit l'allongement du palier à ce dernier facteur.

Le compteur GM du type Maze à cathode de verre (Maze 1946, Bassi et Beretta 1949, Mac Knight et Chasson 1951, Favre et Haenny 1953, Aron 1953) a deux propriétés, nommées dans la suite (a) et (b), qui le distinguent du compteur ordinaire à cathode métallique. La première de ces propriétés (a) est liée avec une

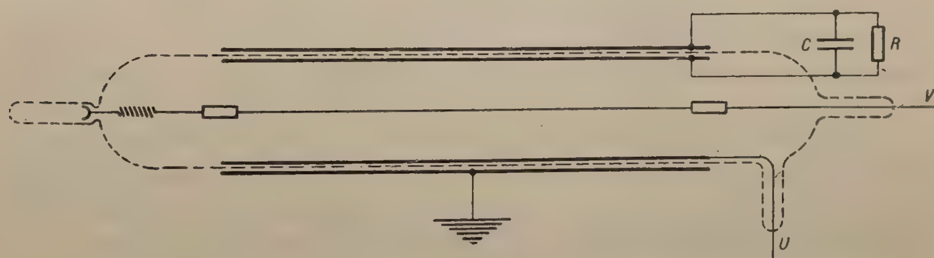


Fig. 1. Un compteur à cathode en verre, le circuit RC est indiqué schématiquement

grande résistance de verre (de quelques cents à quelques mille de mégohms) insérée en série dans le circuit de la cathode (fig. 1). La seconde propriété (b) résulte du remplacement de la surface métallique par la surface de verre. L'objet de ce travail avait pour but de séparer l'influence de ces deux facteurs sur le fonctionnement du compteur et de démontrer en quel degré chacun d'eux cause l'allongement du palier. La longueur

du palier du compteur Maze dépasse largement les valeurs habituelles pour les compteurs ordinaires et atteint 600 V.

a) La résistance de verre R augmente le potential U de la surface cathodique interne pendant le fonctionnement du compteur:

$$U = \frac{V - V_0}{1 + \frac{1}{KRN}}$$

où V est le potentiel de l'anode, V_0 est le potential du seuil du palier, N la fréquence moyenne des impulsions, K un coefficient dépendant de la géometrie du compteur et probablement du mélange gazeux, ainsi que de l'intervalle de potentiel dans lequel on travaille (Zawadzki 1954).

Nous avons employé pour nos mesures des compteurs en verre de resistivité d'environ 3.10^{12} Ω cm à 24°C, de paroi de 1 mm d'épaisseur, de 26 mm de diamètre et de 25 cm de longueur efficace, recouverts de papier imbibé d'encre de chine, le diamètre du fil anodique en acier était de 0,2 mm. Trois compteurs étaient argentés à l'intérieur ce qui permettait une mesure directe du potentiel U à l'aide d'un electromètre (en supprimant toutefois en même temps la propriété caractéristique (b), liée avec la présence de la surface de verre). Tous les compteurs employés contenaient un mélange de 11 cm Hg d'argon technique + 1,5 cm Hg de vapeur du methylal ($CH_2(OCH_3)_2$). Les compteurs fonctionnaient dans l'intervalle de fréquences des impulsions de $N = 8$/sec à $N = 150$/sec (reglées par changement de la position de la source radioactive et de l'épaisseur des absorbants de plomb) et dans un intervalle de température allant de —32°C à +68°C.

Une première série de mesures était effectuée avec des compteurs à cathode argentée à l'intérieur, le palier de ces compteurs était d'environ 200 V. La présence de la résistance R insérée à l'extérieur dans le circuit cathodique allonge le palier dans le rapport ($1 + KRN$), dont la valeur est d'environ 1,35 pour une résistance R (de verre ou accrochée à l'extérieur) de $1,5 \cdot 10^9$ Ω et une fréquence moyenne des impulsions de $N = 8$/sec. On a determiné la valeur de K d'après des mesures de U à l'aide d'un électromètre; elle est égale à (27 ± 10) pF. Vu une divergence notable des résultats, il est impossible de conclure d'une façon directe si la valeur K est indépendante de l'intervalle de potentiel anodique des compteurs et de confirmer la détermination indirecte de l'existence de deux valeurs distinctes de K, effectuée par l'un de nous (Zawadzki 1954). Une étude directe de cette question fera l'objet d'un autre travail.

Le compteur à cathode en verre argenté se comporte comme un compteur ordinaire à cathode métallique avec une résistance insérée dans le circuit cathodique équivalente à la résistance de verre. La fig. 2 présente les caractéristiques du compteur sans et avec une résistance de 1000 $M\Omega$, les fréquences des impulsions sont réduites à la valeur de marche propre du compteur ($N_0 = 8$/sec) dans la région du palier,

allongé pour cette valeur de N par rapport à un compteur sans résistance cathodique. Cet allongement croît avec N (et atteint 200 V pour $N = 150$/sec). (Il est remarquable qu'en insérant une résistance extérieure on n'arrive pas à la région de décharge continue, même en survoltant le compteur d'un potentiel élevé. Grâce à cette circonstance on évite le danger de détérioration d'un compteur par survoltage).

L'effet d'„autorégulation" causé par l'accroissement du potentiel U n'est donc responsable de l'allongement du palier que dans un faible degré. La précaution de certains auteurs d'utiliser des tubes en verre de parois très minces, nous paraît exagérée: une résistance dépassant 2 ou 3 milliers de mégohms convient entièrement à la construction de compteurs pour rayons cosmiques. On peut même mettre à profit le phénomène d'autorégulation en vue d'améliorer les conditions de fonctionnement d'un compteur à cathode métallique possédant un palier court (par exemple 100 V), cela pourrait surtout être avantageux pour un groupe de compteurs travaillant ensemble, où par suite des divergences des caractéristiques individuelles la caractéristique de l'ensemble (ali-

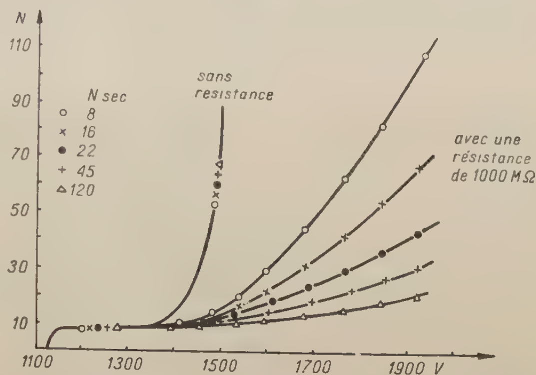


Fig. 2. Caractéristiques d'un compteur à cathode métallique sans et avec une résistance de 1000 MΩ

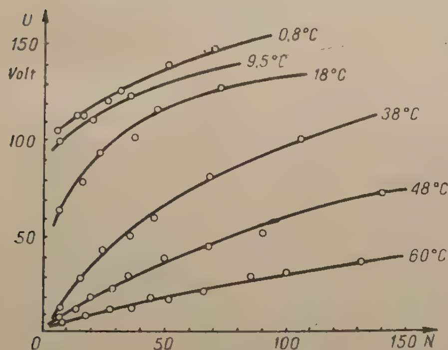


Fig. 3

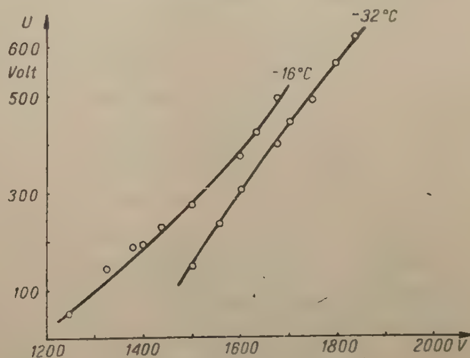


Fig. 4

Fig. 3. Le potentiel de la surface interne de la cathode en fonction de la fréquence des impulsions. Les valeurs de N sont choisies arbitrairement

Fig. 4. Le potentiel U en fonction du potentiel anodique aux basses températures

menté par une seule source de tension) est médiocre. Une résistance commune convenablement choisie et insérée dans le circuit cathodique des compteurs devrait améliorer leur fonctionnement.

Dans des conditions normales de travail, c'est-à-dire à la température d'environ 20°C et pour comptage de marche à vide le phénomène d'autorégulation joue un rôle secondaire dans l'allongement du palier. L'importance de ce phénomène croît soit pour un comptage des impulsions à fréquence élevée (fig.3) soit dans des basses températures (fig. 4). La résistance du verre dépend sensiblement de la température, par exemple de +68°C à —10°C la résistance croît environ 500 fois.

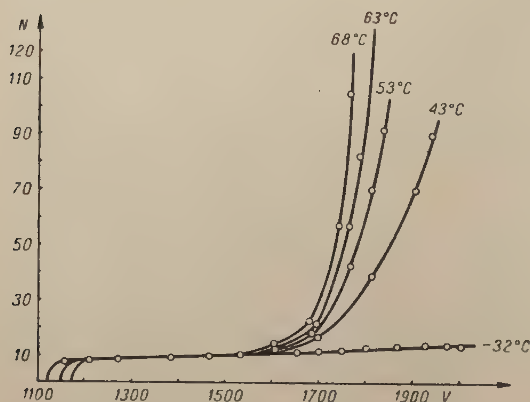


Fig. 5. Les caractéristiques du compteur aux différentes températures

b) Une seconde série de mesures avait pour but de vérifier dans quel degré le facteur (b) (la présence de la surface de verre au lieu d'une surface métallique) influence la longueur du palier. L'élimination de l'effet de l'autorégulation était possible précisément grâce à la dépendance de la résistance du verre de la température. Nous avons mené nos mesures dans un thermostat jusqu'à la température de +68°C, la résistance du verre décroît dans ces conditions au dessous de 50 $M\Omega$, la valeur de U pendant la marche à vide est pratiquement égale à zéro. La fig. 5 présente les caractéristiques du compteur pour quelques valeurs de la température (—32°C, +43°C, +53°C et +68°C). On y remarque que quand la température s'abaisse, l'effet d'autorégulation commence à jouer un rôle. L'allongement du palier par rapport au compteur à cathode métallique dépasse 100 V à 68°C. La grande longueur du palier du compteur Maze est alors due surtout à présence de la surface de verre. La fig. 6 présente les caractéristiques d'un compteur à 24°C pour les différentes irradiations.

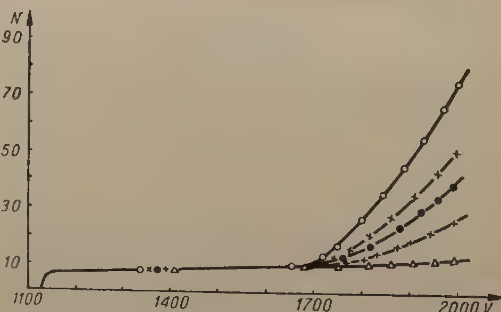


Fig. 6. Les caractéristiques d'un compteur à cathode en verre à 24° C

Ce phénomène provient d'une diminution de la probabilité de l'apparition de l'effet photoélectrique pendant la création de l'avalanche de Townsend et d'autre part d'une réduction sensible du nombre des électrons secondaires délivrés lors de l'arrivée de la gaine des ions positifs à la surface de la cathode. Cette dernière conclusion est d'accord avec les résultats des mesures du coefficient de l'affranchissement des électrons (défini par le rapport du nombre des impulsions multiples au nombre entier des

ions atteignant la surface de la cathode) obtenus par Beretta et Rostagni (1949). Pour une cathode en cuivre ils ont obtenu une valeur de ce coefficient: $(0{,}33 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-10}$, pour une cathode en verre: $(0{,}05 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-10}$.

Il nous semble que le compteur du type Maze grâce à sa simplicité de construction, son long palier et l'impossibilité de détérioration par survoltage convient tout spécialement aux recherches dans le domaine des rayons cosmiques et même si on utilise des verres de faible résistivité à celles de physique nucléaire.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

С. Михаляк, В. Мовчан и А. Завадский, *Удлиннение плато счетчиков Г. М.*

У счетчика типа Маза плато значительно длиннее чем у счетчика с внутренним катодом. Произведено исследование двух факторов, которые обусловливают это свойство счетчика Маза, а именно: большого электрического сопротивления стекла, находящегося в катодной цепи, и присутствия стеклянной поверхности вместо металлической. Удлиненние плато счетчика происходить главным образом под влиянием последнего фактора.

BIBLIOGRAPHIE

Aron A., Z. *Phys.*, **134**, 622 (1953).
Bassi P. et Beretta E., *Nuovo Cimento*, **6**, 585 (1949).
Beretta R. et Rostagni H., *Nuovo Cimento*, **6**, 391 (1949).
Favre R. et Haenny Ch., *Helv. phys.* Acta, **26**, 53 (1953).
Mac Knight M. L. et Chasson R. L., *Rev. sci. Instr.*, **22**, 700 (1951).
Maze R. *J.*, *Phys. Radium*, 164 (1946).
Zawadzki A., *Mem. Soc. Sci.*, Łódź (sous presse).

A MAINS VOLTAGE STABILIZER WITH IRON-HYDROGEN CURRENT REGULATORS

By Kazimierz Grzesiak

Physics Department, Nicholas Copernicus Uniersity, Toruń

(received November 24, 1953)

A circuit based on the negative feedback principle using series connected magnetic amplifiers and a non-linear bridge has been constructed and checked. The control bridge consists of two iron-hydrogen current regulators and two constantan wire - wound resistors. This bridge delivers a voltage proportional to any deviation of the stabilized voltage from the level for which the bridge is balanced. This voltage is transformed up, rectified, and fed to the grid circuit of a vacuum triode. The anode current of this triode is then used to control the a.c. voltage drop across both magnetic amplifiers in such a manner that the stabilized voltage fluctuations caused by the mains voltage and load changes are minimized. Experimental results are given and some design problems briefly discussed.

Among the circuits used to day for a. c. voltage stabilization, those based on the negative feedback principle have the best stabilizing properties. The most efficient and perhaps the simplest of these circuits contain a special saturated diode for the

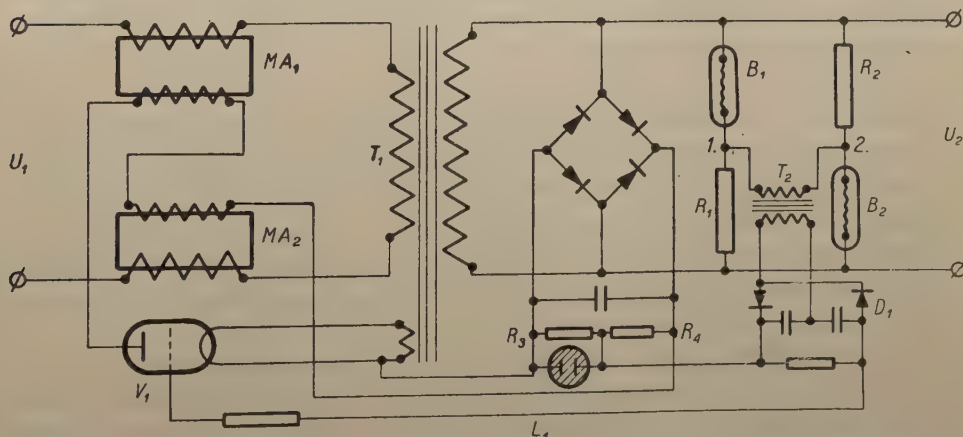


Fig. 1. A mains voltage stabilizer with iron-hydrogen current regulators

non-linear element of the control bridge. (Goldreier 1952, Jellonek 1952). The circuit described below is similar to that mentioned above, the difference consisting in a new kind of non-linear control bridge.

Circuit description. The basic circuit diagram is shown in fig. 1. Two magnetic amplifiers MA_1 and MA_2 are connected in series with the primary winding of a transformer T_1 having a step-up ratio depending on the voltage drop chosen for a. c. windings of the magnetic amplifiers and the stabilized voltage level needed. A bridge consisting of two iron-hydrogen current regulator tubes B_1 and B_2 and two constantan wire-wound resistors R_1 and R_2 is connected across the output terminals of the transformer T_1. Tubes B_1 and B_2 hold the currents I_1 and I_2 in both branches of the bridge almost independent of the output voltage changes. This causes the voltage drop across the resistances R_1 and R_2 to be almost constant. A simple calculation shows that a voltage proportional to any deviation of the output voltage from the value for which the bridge is balanced appears between the control points 1 and 2 of the bridge. This voltage is transformed up by transformer T_2, rectified by means of a voltage doubling rectifier D_1 and fed to the grid circuit of a vacuum triode V_1. The anode current of this triode controls the reactances of both magnetic amplifiers. The d.c. source for V_1 is simply a bridge connected rectifier supplied directly from the output terminals of transformer T_1. To avoid instability due to the fact that for any deviation of the output voltage beneath the balance level the bridge begins to operate in the negative slope region of its characteristic (e.g. in the positive feedback region of the control circuit), a polarizing circuit consisting of a small neon lamp L_1 and two resistances R_3 and R_4 was added. This circuit gives a positive constant voltage of 70 V to the grid circuit of the control triode V_1; the control circuit gives a negative voltage equal to the sum of the polarizing and regulating voltages; this causes a shift of the working point on the control bridge characteristic to the region of larger values

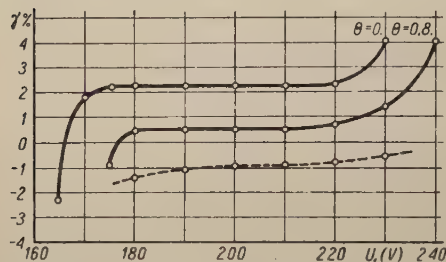


Fig. 2. Relative change of output voltage as function of primary voltage

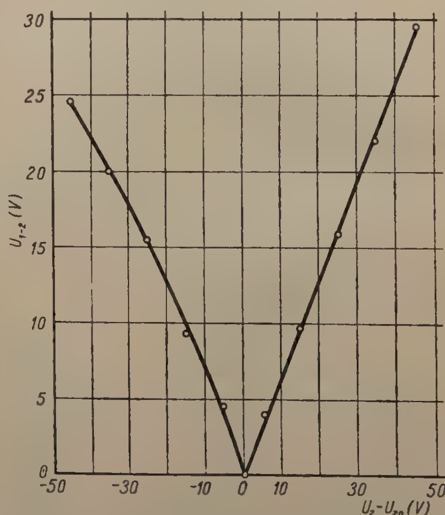


Fig. 3. Characteristic of the bridge for 10 kΩ resistive load

of the voltage U_{1-2} between the control points of the bridge. If one uses copper-oxide or selenium rectifiers for both the d.c. source and voltage doubling rectifier, the stabilizer becomes a very simple one. A further simplification may be introduced by using an autotransformer for T_1; this is possible in all cases where a separate grounding of the secondary side is not necessary.

Experimental results. To check the properties of the circuit, a 1000 VA unit for 175 — 230 V mains voltage stabilization has been constructed. Two 90 — 270 V, 0,12A Osram iron-hydrogen current regulators were used in the control bridge and two AD1/N triodes in parallel were chosen to control the reactances of the magnetic

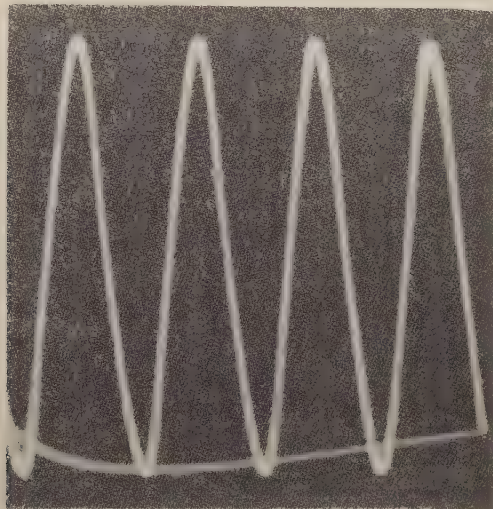


Fig. 4. Output voltage wave shape for $\Theta = 0{,}92$, $U_1 = 180$ V (Resistive load)

amplifiers. All rectifiers were of the vacuum tube type. Fig. 2 shows the stabilization properties of this stabilizer. The curves represent the relation between the relative output voltage change, defined as: $\gamma = \frac{\Delta U_2}{U_{2\,NOM}} \cdot 100\%$, and the primary voltage across the input terminals of the stabilizer for: (1) open circuit conditions ($\vartheta = 0$) and (2) 80 per cent of nominal load (solid curves). The dotted curve shows this relation as calculated after preliminary measurements of the magnetic amplifier characteristics for nominal loading. It is evident that this circuit gives a very satisfactory stabilization. The results presented here are for pure resistive loads. The dependence of the control voltage U_{1-2} on the output voltage deviations from the value for which the control bridge is balanced may be easily calculated only for open circuit conditions ($R_{1-2} = \infty$). It is easy, however, to measure the current in the actual load between the control points of the bridge as a function of the output voltage deviation from the balance level and to calculate U_{1-2} from the known load value. Fig. 3 shows such a characteristic of the bridge, as used in the described circuit, for 10 $k\Omega$ resistive load.

The curve represents the relation between r.m.s. value of U_{1-2} and the difference between the actual output voltage and the voltage for which the bridge was balanced. The mean voltage efficiency, defined as the mean slope of the curve, is about 0,6 V/V.

Steady state conditions were reached some 3 minutes after connecting the primary voltage. This lapse of time depends upon the thermal properties of the current regulator tubes and the heat capacity of the surrounding. Slow change of the ambient temperature around the regulator tubes must be avoided, otherwise a slow output voltage drift may occur. (Groszkowski 1951). Oscilloscopic observations showed the time constant for transient change of primary voltage to be of the order of 300 milliseconds. Neither oscillations nor instability were observed over the whole possible region of primary voltage changes.

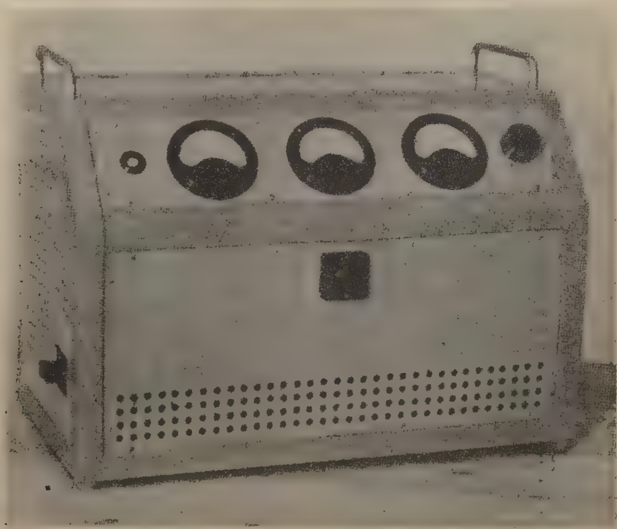


Fig. 5. External view of the 1000 VA stabilizer

Conclusion. The circuit described seems to be very useful for preliminary a.c. voltage stabilization for electronic devices. Its advantages are: simplicity, very satisfactory stabilization properties, perfect output voltage wave shape; its disadvantages — comparatively large power losses in the control bridge making it suitable only for powerful units and comparatively large time constants. This last disadvantage seems to be of little importance, however, owing to the large filter time constants of common rectifiers and thermal inertia of indirectly heated cathodes of vacuum tubes.

The circuit stabilizes the peak value of the output voltage; this is undoubtedly a disadvantage in comparison with a stabilizer with saturated diode as non-linear element in the control circuit, which responds to root mean square values of the stabilized voltage.

I wish to express my sincere thanks to Professor W. Mościcki for encouragement and exhaustive discussions. I am very grateful to Mgr S. Gorgolewski for many discussions and help in checking the properties of the circuit and to Mgr Ing. S. Szyc for a discussion on the properties of non-linear elements. I express also my sincere thanks to Mr. S. Kozierkiewicz for his excellent work and help in solving many technical problems.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

К. Гжесяк, *Стабилизатор напряжения сети с железоводородными регуляторами тока.*

Электрический контур, основанный на принципе отрицательной обратной связи, имеющий серийно-соединённые магнитные усилители и нелинейный мостик был построен и проверен. Контрольный мостик состоит из двух железоводородных регуляторов тока и двух константановых проволочных сопротивлений. Этот мостик даёт напряжение, пропорциональное любому отклонению стабилизированного напряжения от уровня, для которого мостик уравновешен. Этот вольтаж трансформирован, выпрямлён и подан на сетку вакуумного триода. Анодный ток этого триода употреблён затем, чтобы регулировать падение переменного напряжения в обоих магнитных усилителях таким образом, чтобы флуктуации стабилизированного напряжения, вызванные напряжением сети и изменениями нагрузки были минимальными. В работе поданы экспериментальные результаты и предусмотрены некоторые вопросы, относящиеся к схеме устройства.

REFERENCES

Goldreier I. G., Voltage Stabilizers, Leningrad 1952 (in Russian).

Jellonek A., Radiotechnical Measurements, Warszawa 1952 (in Polish).

Groszkowski J., Prace Pol. Techn. Inst. 4, 43, 44 (1951).

Volumen XIII (1954) — Fa ciculus 2

A. Jabłoński, Magnetic Rotation of the Plane of Polarization of Broadenet Resonance Lines 91
J. Rayski, On a Regular Field Theory III 95
A. Rubinowicz, Über die Fortpflanzung unstetiger elektromagnetischer S'gnale in Wellenleitern 115
J. Rrzewuski, Canonical Formalism for Non-Local Theories I 135

Laboratory Equipment and Techniques

S. Michalak, B. Mowczan et A. Zawadzki, L'Allongement du palier des compteurs GM a cathode en verre 145
K. Grzesiak, A Maions Voltage Stabilizer with Iron-Hydrogen Current Regulators 151